



Kiedy $2 + 2$ nie równa się 4
– wczesna diagnoza specyficznych
trudności w uczeniu się matematyki



Rozwój zdolności arytmetycznych

- Subitacja (subitising)
- Szacowanie
- Przeliczanie i liczenie
- Mentalna oś liczbowa
- Dziesiętkowy system pozycyjny
- Fakty arytmetyczne
- Wiedza proceduralna
- Konceptyjna wiedza matematyczna





Zmysł liczbowy (number sense)

- Zmysł liczbowy to wrodzona zdolność człowieka do postrzegania liczebności oraz zmiany liczebności – przybywania, ubywania
- Zmysł liczbowy rozwija się wraz z wiekiem i gromadzonymi doświadczeniami, także tymi wynikającymi z celowo zorganizowanej edukacji.





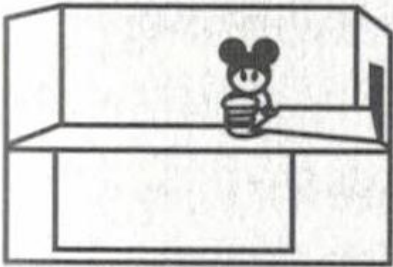
Zmysły i zdolności wrodzone (zadatki)

- Zmysł wzroku
- Zmysł słuchu
- Zmysł powonienia
- Zmysł smaku
- Zmysł równowagi
- Zdolność do uczenia się mowy
- Zdolność do wyłapywania prawidłowości gramatycznych języka
- Poczucie rytmu
- Poczucie wysokości dźwięku – słuch muzyczny
- Zdolność do wyłapywania prawidłowości liczenia
- ...

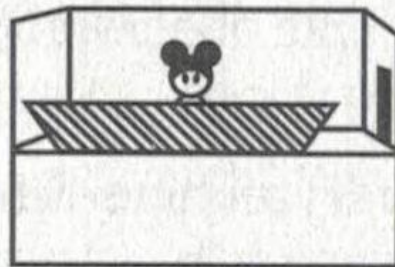


Zmysł liczbowy – badania niemowląt

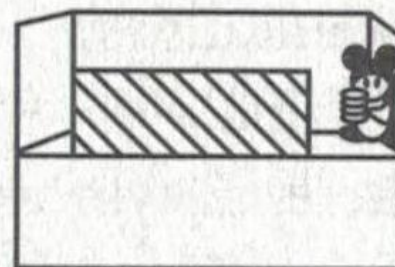
1. Umieszczenie obiektu na scenie.



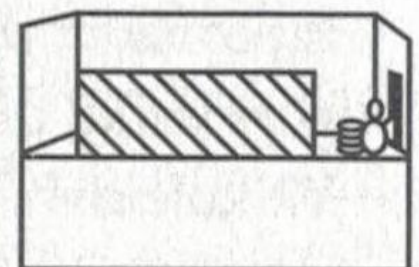
2. Podniesienie ścianki.



3. Dołożenie drugiego obiektu.

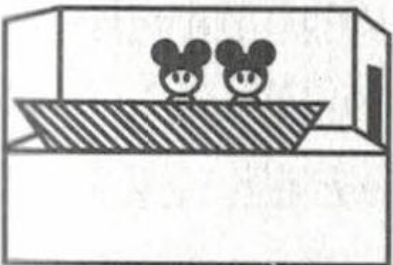


4. Wysunięcie się pustej dłoni.

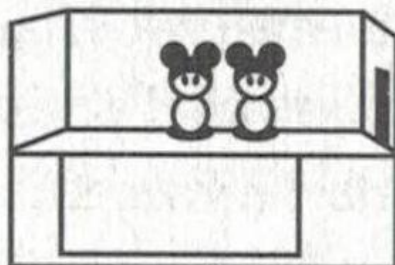


Potem albo: możliwość (a)

5. Opadnięcie ścianki.

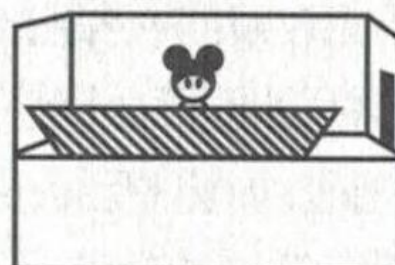


6. Ukazanie się dwóch obiektów.

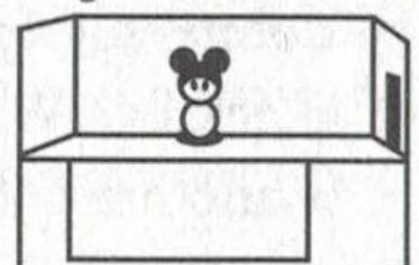


Albo: możliwość (b)

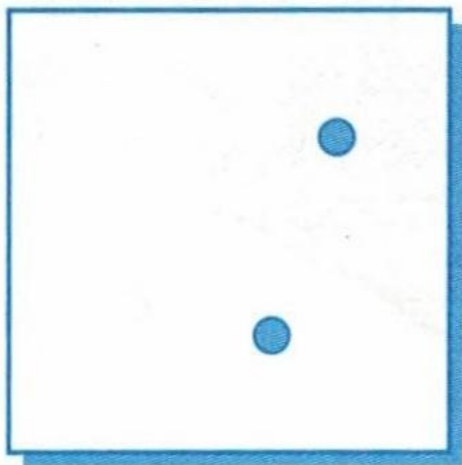
5. Opadnięcie ścianki.



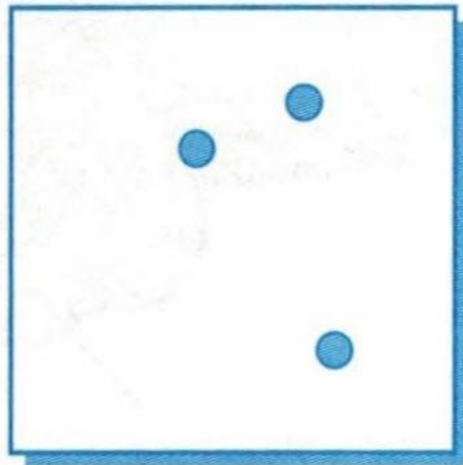
6. Ukazanie się jednego obiektu.



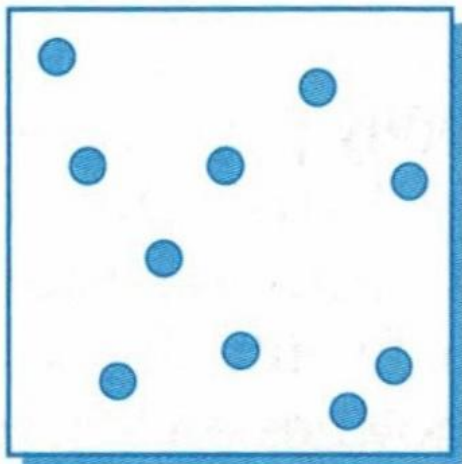
Subitacja i przeliczanie



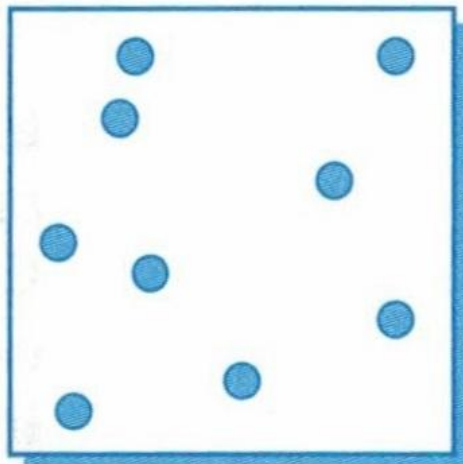
Box A



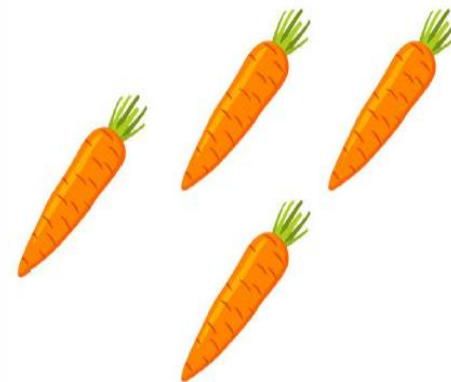
Box B



Box C



Box D



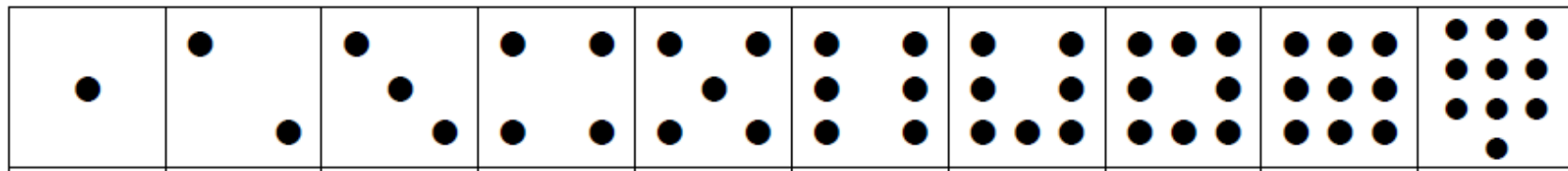
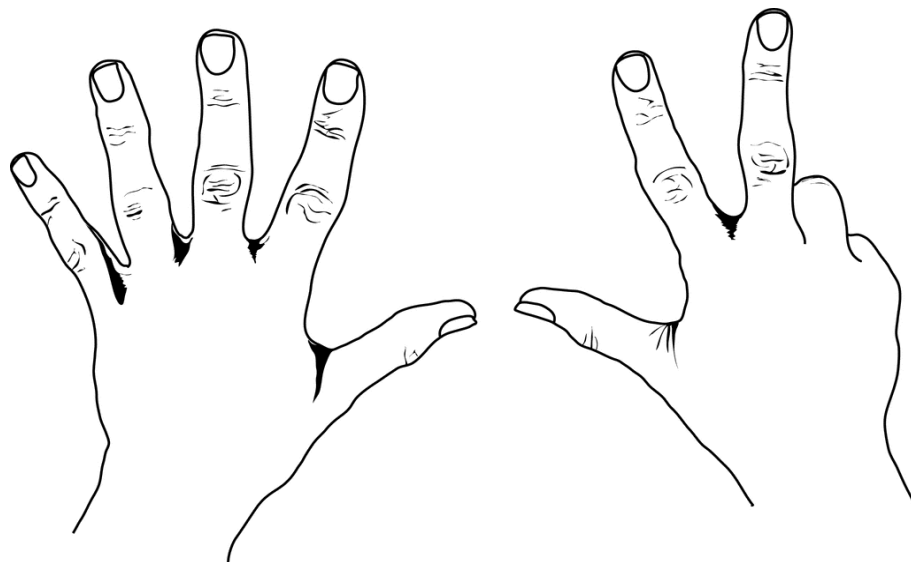
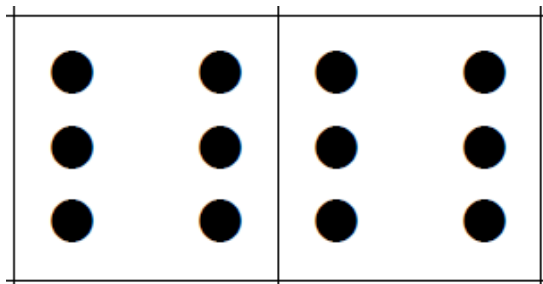
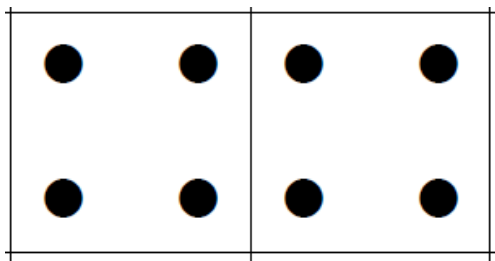


Subitacja

Subitising Game

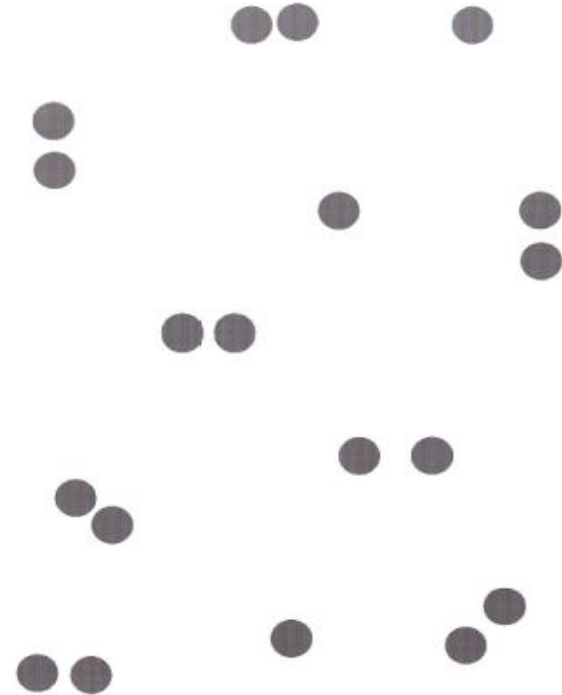
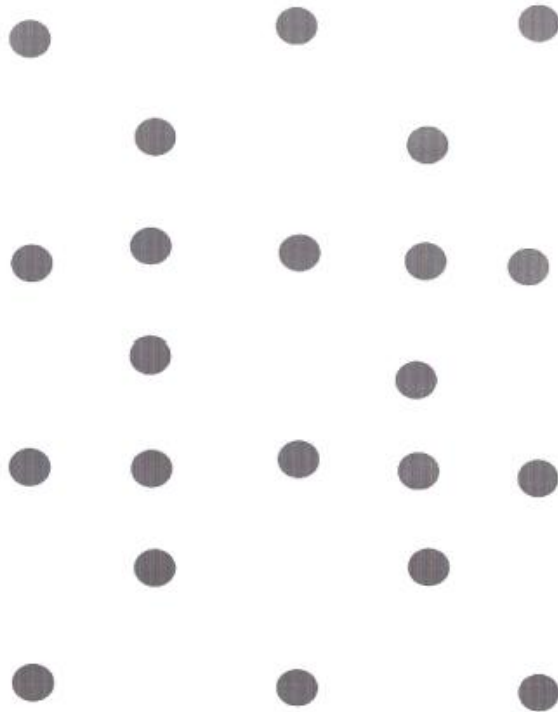


Ustalanie liczebności – znane układy





Szacowanie



Szacowanie



Czy liczba koralików jest bliżej 50,
czy bliższa 100?





Subitacja i szacowanie

- Osłabienie zdolności oceny liczebności
- obniżone możliwości oceny poprawności wyników prowadzonych obliczeń,
- mniej adekwatne wyobrażenie wielkości liczby,
- utrudniony rozwój zmysłu matematycznego i zdolności arytmetycznych.





Przeliczanie i liczenie

Obserwowanie, jak inni liczą

Opanowanie nazw liczebników

Wychwytywanie prawidłowości liczenia

Opanowanie zasady kardynalności

Liczenie od dowolnej liczby (w górę i w dół)

Odkrywanie zasad powtarzalności systemu
liczbowego

Liczenie po dwa, liczenie po pięć, liczenie po
dziesięć



Przeliczanie i liczenie

Przeliczanie obiektów



Liczenie w górę

Liczenie w dół

46	62
18	83





Przeliczanie i liczenie

W przypadku zaburzenia rozwoju umiejętności przeliczania i liczenia:

- późniejsze niż rówieśnicy opanowanie umiejętności liczenia,
- nieszanowanie zasad liczenia (zasada jeden do jednego, zasada kardynalności, nieistotności kierunku liczenia)
- trudności w rozpoczynaniu liczenia od dowolnej liczby,
- trudności w liczeniu dwójkami, piątkami, dziesiątkami.





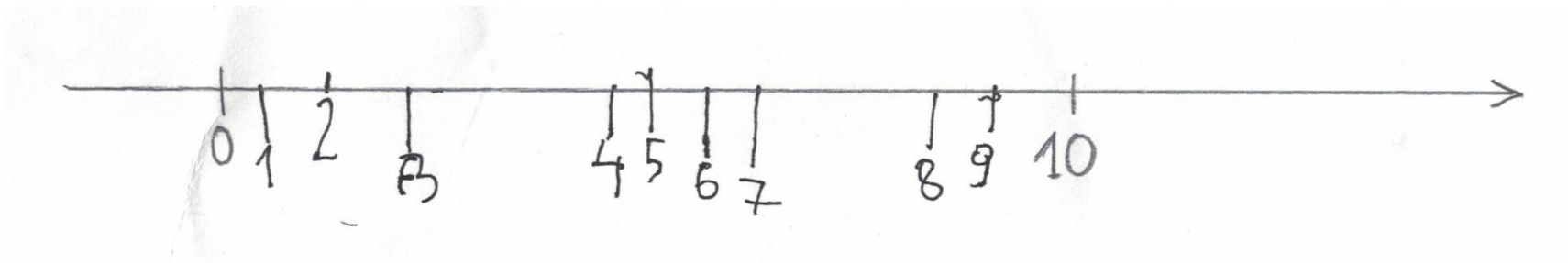
Mentalna oś liczbowa

- Poznawanie szeregu liczbowego, obrazowanie liczb na osi liczbowej i znajdowanie miejsca liczby na osi, prowadzi do wytworzenia się w umyśle ucznia tzw. mentalnej osi liczbowej – czyli wyobrażenia następstwa liczb, miejsca danej liczby w szeregu liczbowym.
- Zwykle to wyobrażenie związane jest z wyglądem osi liczbowej, którą najczęściej rysujemy tak, że liczby rosną od strony lewej ku prawej.
- Prawidłowe wytworzenie się w umyśle mentalnej osi liczbowej wymaga zgromadzenia wielu doświadczeń związanych z przeliczaniem, rachowaniem, ilustrowaniem liczb na narysowanej osi liczbowej.

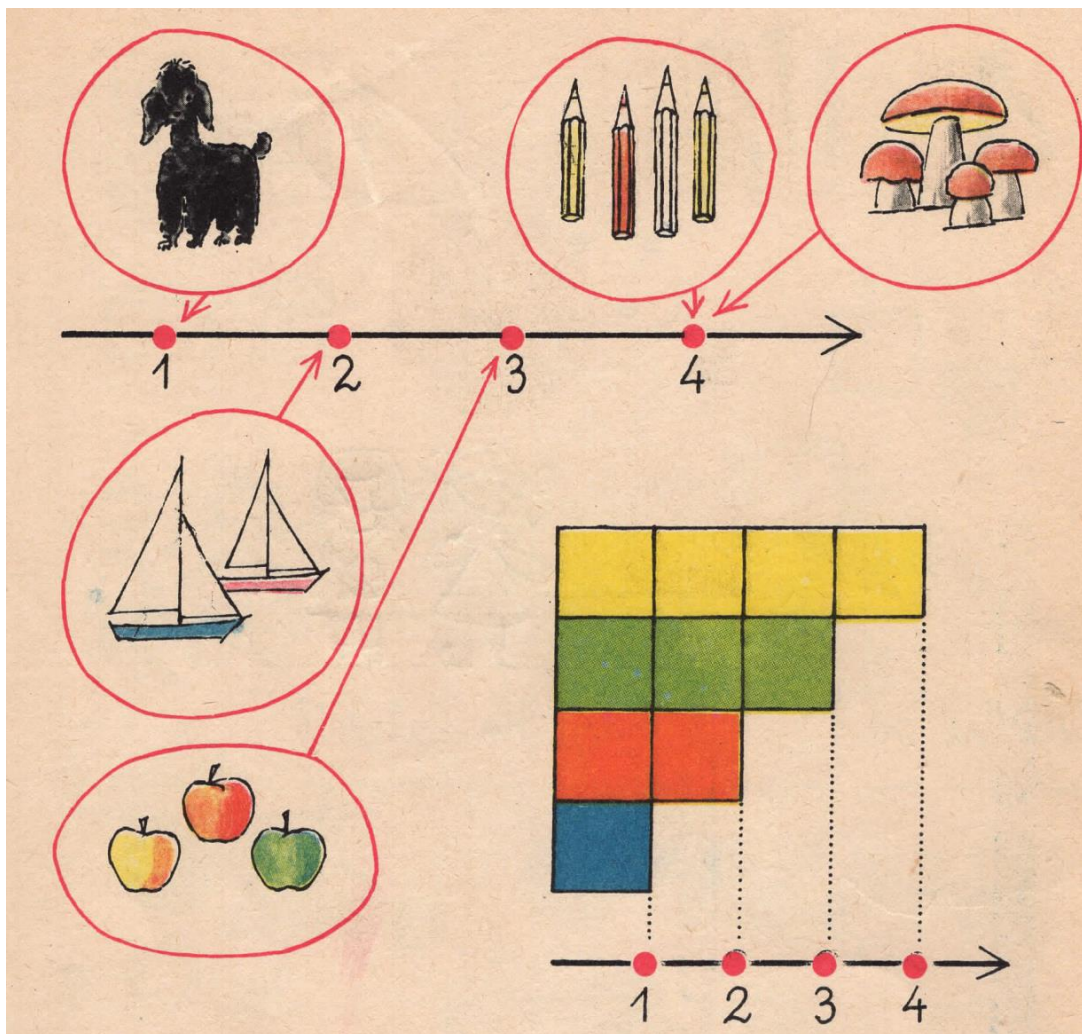




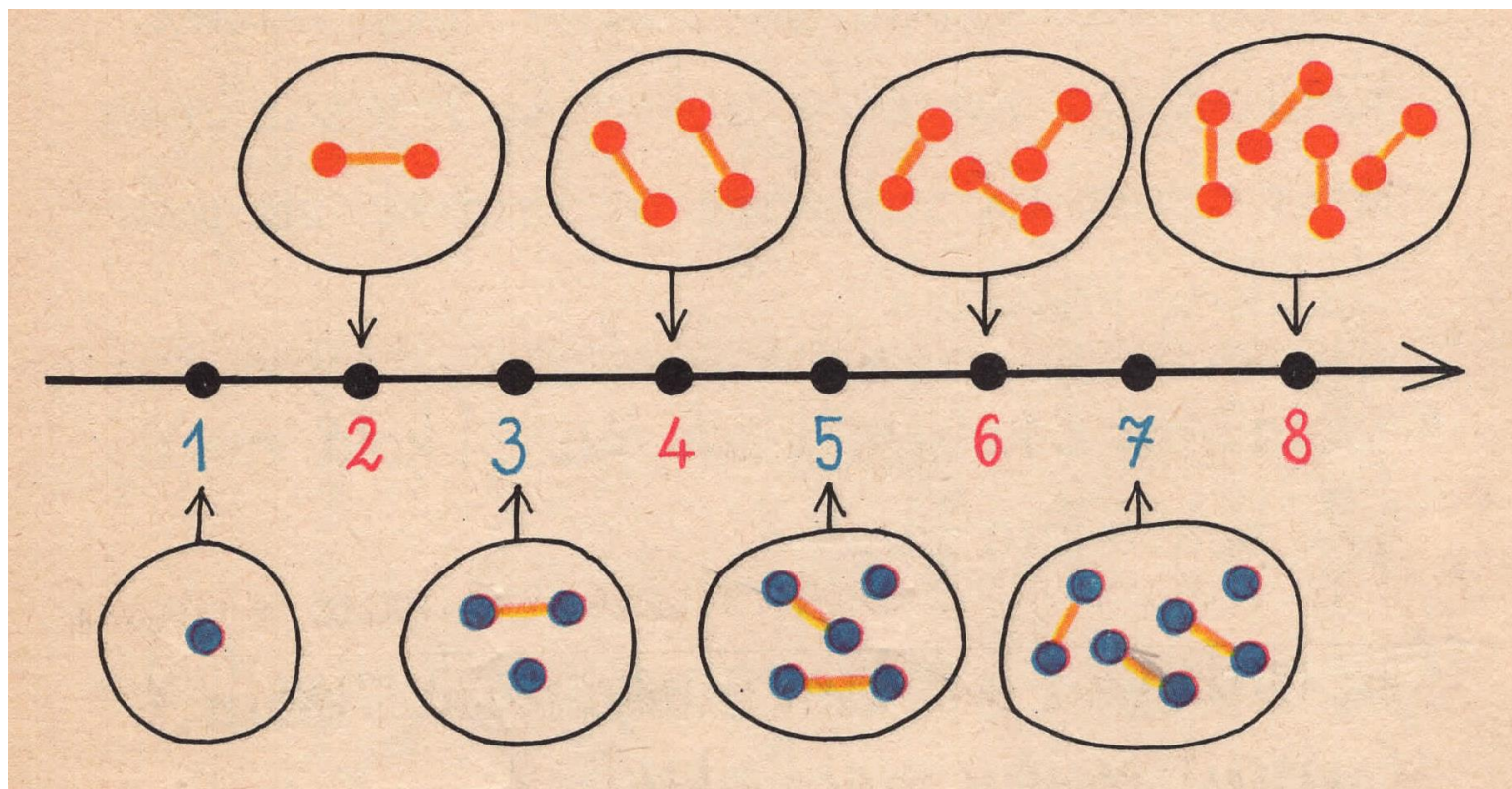
Mentalna oś liczbowa



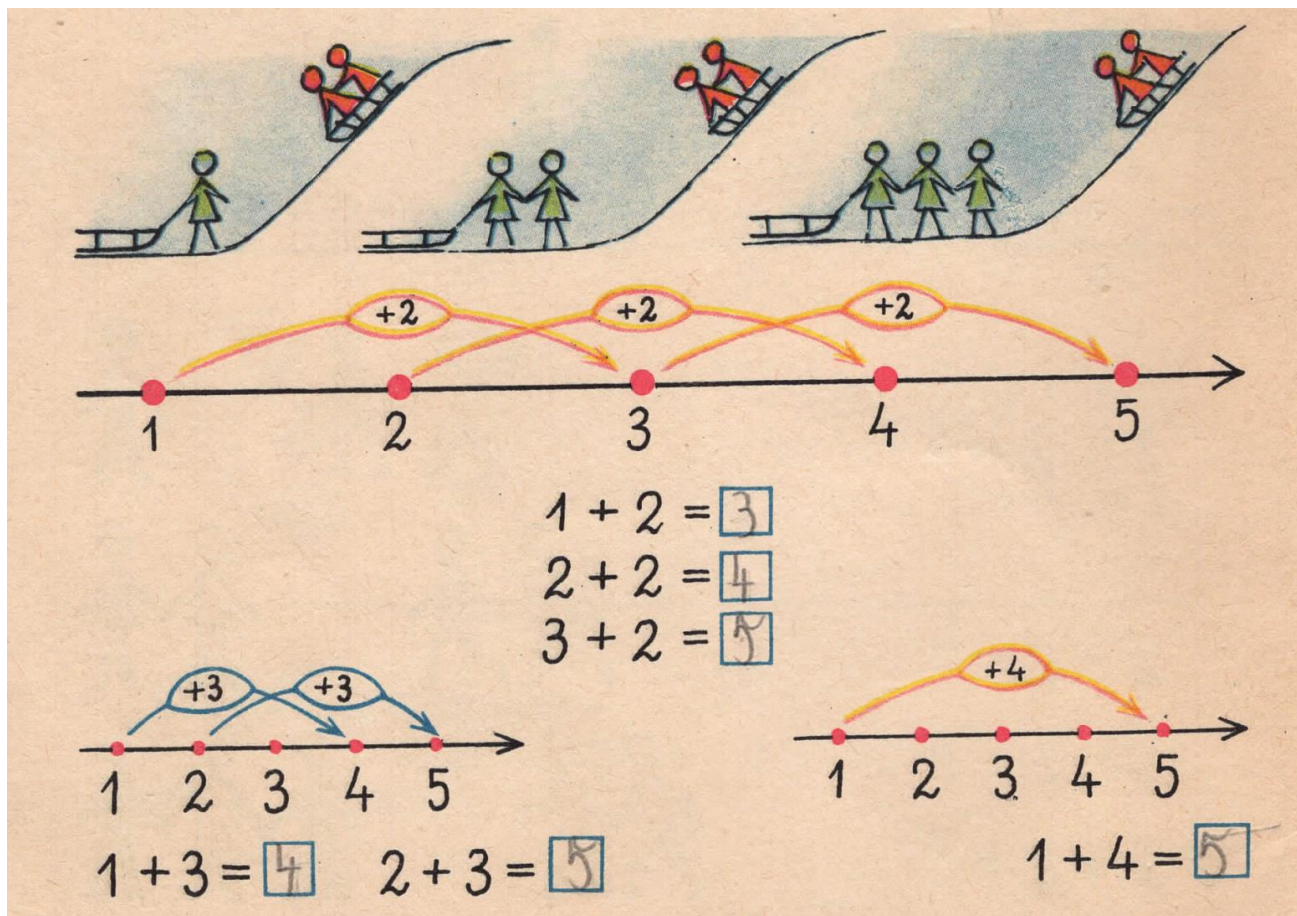
Mentalna oś liczbowa



Mentalna oś liczbowa



Mentalna oś liczbowa

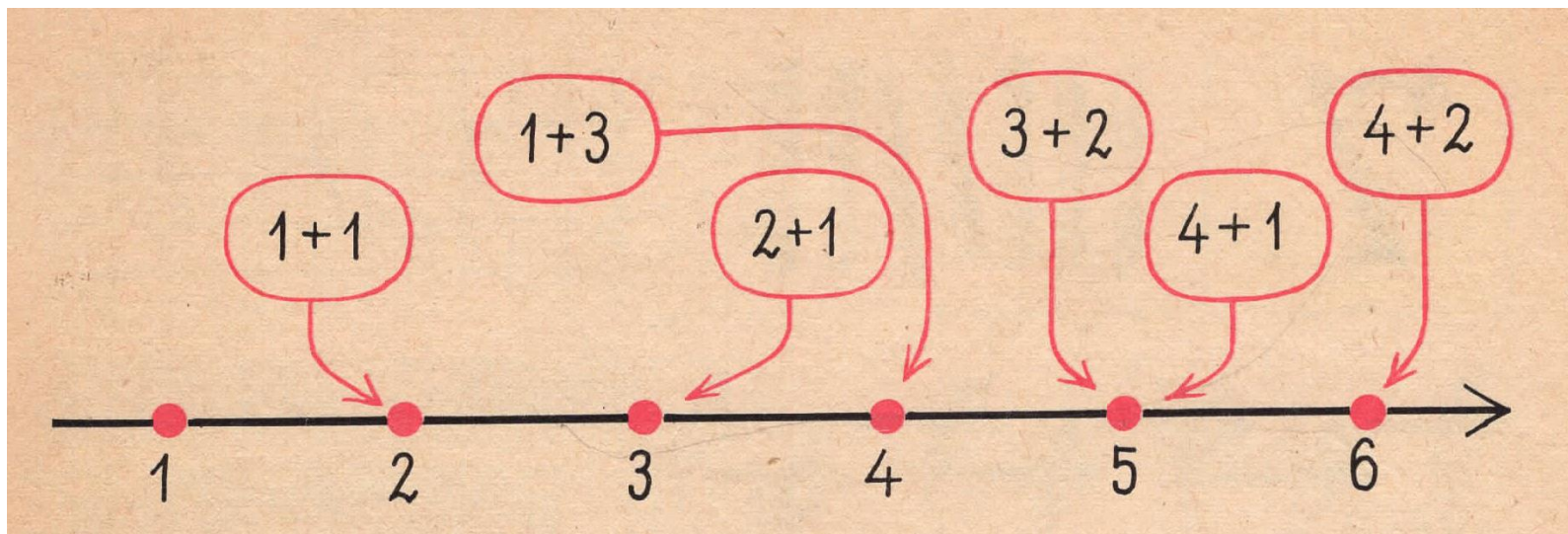


A

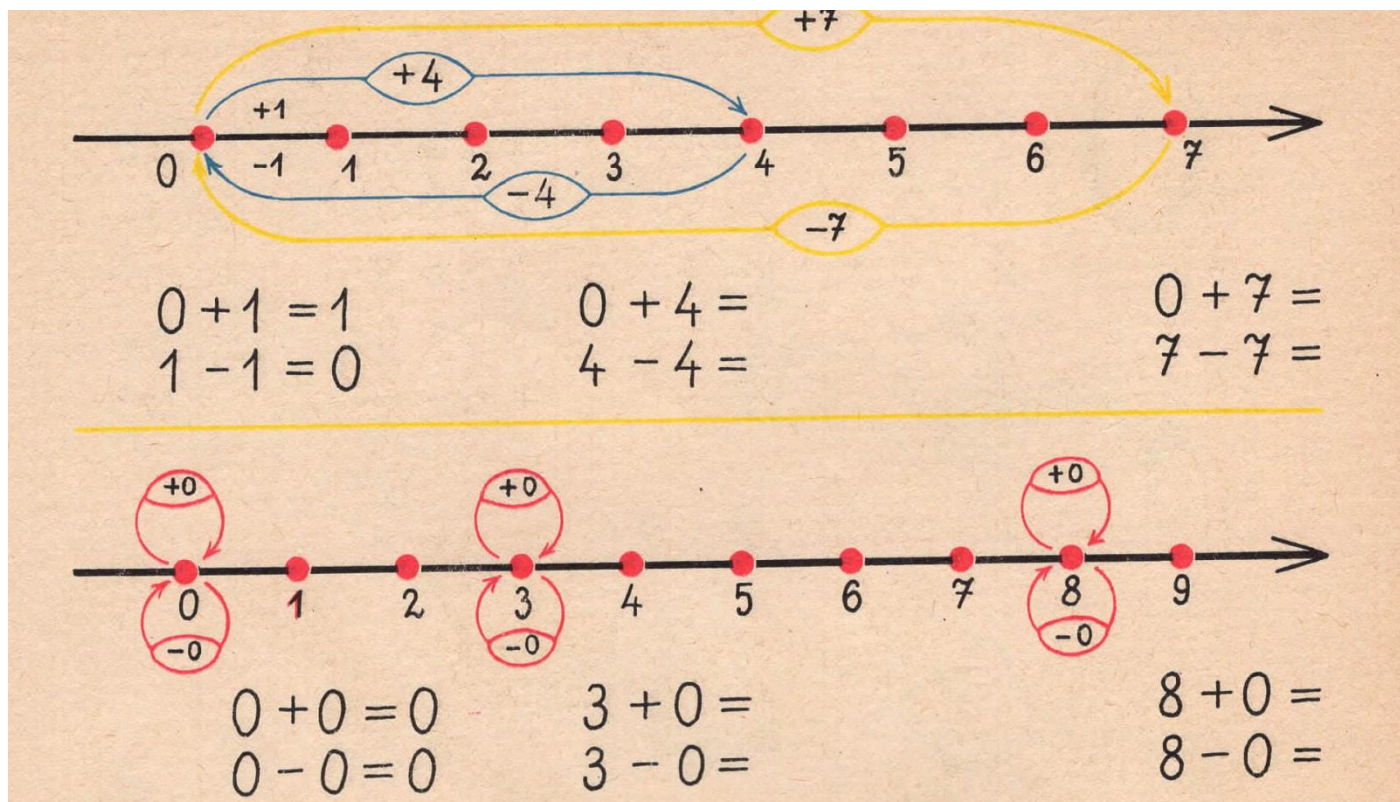
B

C

Mentalna oś liczbowa



Mentalna oś liczbowa





Polowanie na tygrysa



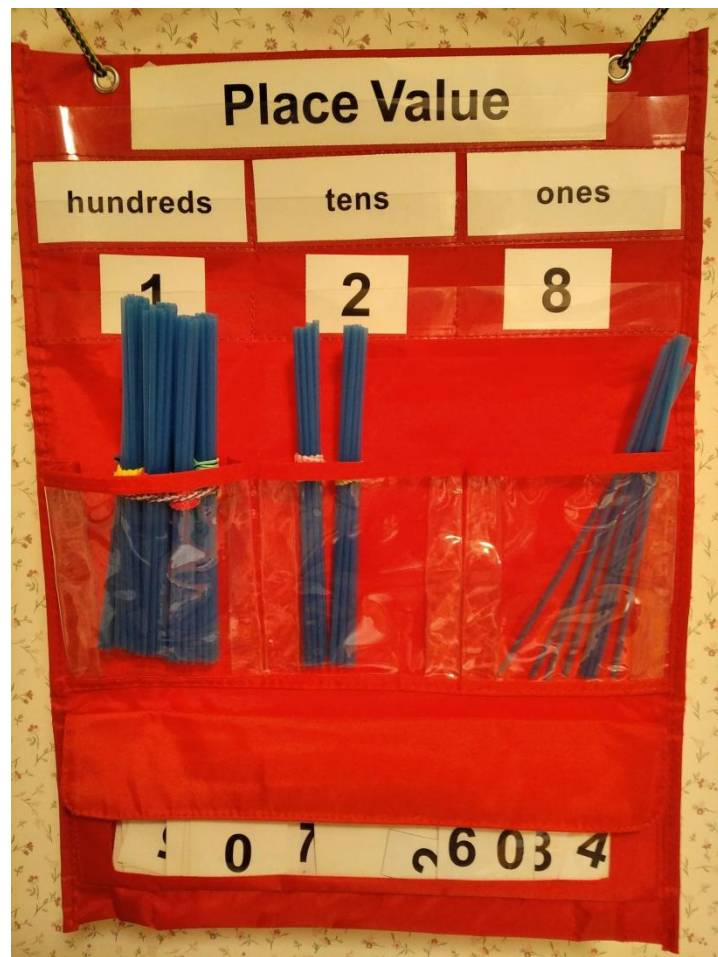


Dziesiętkowy system pozycyjny

- Rozumienie istoty dziesiętkowego układu pozycyjnego ma kluczowe znaczenie dla rozwijania umiejętności arytmetycznych.
- Uczniowie z dyskalkulią niejednokrotnie słabiej niż inni dostrzegają prawidłowości tego systemu zapisywania liczb, trudniej przyswajają matematyczne procedury i algorytmy związane z pozycyjnym znaczeniem liczb.



Dziesiątkowy system pozycyjny





Fakty arytmetyczne

- **Fakty arytmetyczne** – proste działania rachunkowe z udziałem (najczęściej) jednocyfrowych operandów (np. $4+2$, $8:4$), których wyniki przechowywane są w pamięci długotrwałej i przywoływane z tej pamięci.
- Fakty arytmetyczne są zorganizowane w formie sieci asocjacyjnych (skojarzeniowych).
- Dany problem arytmetyczny ($3 \cdot 5$) zostaje asocjacyjnie powiązany z określoną odpowiedzią (15).
- Dzieje się tak dzięki wielokrotnej prezentacji bądź wielokrotnie wykonywanym ćwiczeniom obliczeniowym.





Tabliczka mnożenia

- Tabliczka mnożenia to klasyczna forma wiedzy o faktach liczbowych, którą przyswajamy w większości na drodze ćwiczeń.
- Niektóre fakty matematyczne oparte są na regule – np. $(3 \cdot 0) = 0$ – wystarczy zrozumieć tylko jedno zadanie, aby rozwiązać wszystkie inne zadania tego typu.
- Większość faktów musi być wyuczona i przywoływana jest asocjacyjnie.
- Niektóre fakty z tabliczki mnożenia zapamiętywane są łatwiej, a inne trudniej – np. łatwiej zapamiętywane są fakty dotyczące mniejszych operandów, dwóch takich samych operandów (kwadraty liczb), fakty, w których jednym z operandów jest liczba 5.





Deficyty w zakresie wiedzy o faktach

- Zaburzenia gromadzenia wiedzy o faktach arytmetycznych.
- Zaburzenia przywoływania faktów arytmetycznych.
- Błędy operandu – uczeń podczas przywoływania faktów dotyczących mnożenia podaje nieprawidłową liczbę – znajdującą się w tabeli mnożenia w bezpośrednim sąsiedztwie poprawnego rozwiązania.





Tabliczka mnożenia

Mnożenie przez 1

$1 \times 1 = 1$
 $1 \times 2 = 2$
 $1 \times 3 = 3$
 $1 \times 4 = 4$
 $1 \times 5 = 5$
 $1 \times 6 = 6$
 $1 \times 7 = 7$
 $1 \times 8 = 8$
 $1 \times 9 = 9$
 $1 \times 10 = 10$

Mnożenie przez 2

$2 \times 1 = 2$
 $2 \times 2 = 4$
 $2 \times 3 = 6$
 $2 \times 4 = 8$
 $2 \times 5 = 10$
 $2 \times 6 = 12$
 $2 \times 7 = 14$
 $2 \times 8 = 16$
 $2 \times 9 = 18$
 $2 \times 10 = 20$

Mnożenie przez 3

$3 \times 1 = 3$
 $3 \times 2 = 6$
 $3 \times 3 = 9$
 $3 \times 4 = 12$
 $3 \times 5 = 15$
 $3 \times 6 = 18$
 $3 \times 7 = 21$
 $3 \times 8 = 24$
 $3 \times 9 = 27$
 $3 \times 10 = 30$

Mnożenie przez 4

$4 \times 1 = 4$
 $4 \times 2 = 8$
 $4 \times 3 = 12$
 $4 \times 4 = 16$
 $4 \times 5 = 20$
 $4 \times 6 = 24$
 $4 \times 7 = 28$
 $4 \times 8 = 32$
 $4 \times 9 = 36$
 $4 \times 10 = 40$

Mnożenie przez 5

$5 \times 1 = 5$
 $5 \times 2 = 10$
 $5 \times 3 = 15$
 $5 \times 4 = 20$
 $5 \times 5 = 25$
 $5 \times 6 = 30$
 $5 \times 7 = 35$
 $5 \times 8 = 40$
 $5 \times 9 = 45$
 $5 \times 10 = 50$

Mnożenie przez 6

$6 \times 1 = 6$
 $6 \times 2 = 12$
 $6 \times 3 = 18$
 $6 \times 4 = 24$
 $6 \times 5 = 30$
 $6 \times 6 = 36$
 $6 \times 7 = 42$
 $6 \times 8 = 48$
 $6 \times 9 = 54$
 $6 \times 10 = 60$

Mnożenie przez 7

$7 \times 1 = 7$
 $7 \times 2 = 14$
 $7 \times 3 = 21$
 $7 \times 4 = 28$
 $7 \times 5 = 35$
 $7 \times 6 = 42$
 $7 \times 7 = 49$
 $7 \times 8 = 56$
 $7 \times 9 = 63$
 $7 \times 10 = 70$

Mnożenie przez 8

$8 \times 1 = 8$
 $8 \times 2 = 16$
 $8 \times 3 = 24$
 $8 \times 4 = 32$
 $8 \times 5 = 40$
 $8 \times 6 = 48$
 $8 \times 7 = 56$
 $8 \times 8 = 64$
 $8 \times 9 = 72$
 $8 \times 10 = 80$

Mnożenie przez 9

$9 \times 1 = 9$
 $9 \times 2 = 18$
 $9 \times 3 = 27$
 $9 \times 4 = 36$
 $9 \times 5 = 45$
 $9 \times 6 = 54$
 $9 \times 7 = 63$
 $9 \times 8 = 72$
 $9 \times 9 = 81$
 $9 \times 10 = 90$

Mnożenie przez 10

$10 \times 1 = 10$
 $10 \times 2 = 20$
 $10 \times 3 = 30$
 $10 \times 4 = 40$
 $10 \times 5 = 50$
 $10 \times 6 = 60$
 $10 \times 7 = 70$
 $10 \times 8 = 80$
 $10 \times 9 = 90$
 $10 \times 10 = 100$

Tabliczkamnozenia.pl





1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100





x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100





Błąd operandu

drugi operand

p
i
e
r
w
s
z
y

o
p
e
r
a
n
d

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100





Zadania produktywne i zadania weryfikacyjne

- **Zadania produktywne** – osoba widzi lub słyszy zadanie i musi sama wygenerować odpowiedź.
Ma podany przykład i ma podać wynik.
- **Zadania weryfikacyjne** – osoba widzi kompletne zadanie – problem wraz z rozwiązaniem np. $3 \cdot 7 = 24$ i ma zdecydować, czy rozwiązanie jest prawidłowe czy błędne.
- Łatwiej jest dostrzec błędy, w przykładach, gdzie podano wynik spoza tabeli mnożenia, niż kiedy wynik należy do tabeli mnożenia i jest wynikiem dla sąsiedniego operandu.

$$3 \cdot 6 = 17$$

$$3 \cdot 6 = 24$$





Proceduralna wiedza arytmetyczna

- **Proceduralna wiedza matematyczna** – wiedza dotycząca obliczania algorytmów matematycznych czyli właściwej kolejności procedur matematycznych podczas wielopoziomowych i złożonych obliczeń.

Np. pisemne dodawanie

- rozpoznanie rodzaju działania – dodawanie
- zapisanie prawidłowo liczb (przestrzenna organizacja zapisu) jedna pod drugą, rząd jedności pod rzędem jedności itd.
- proces obliczeniowy – od czego zacząć, co zrobić przy przekroczeniu progu dziesiątkowego





Deficyty proceduralne

- zapominanie procedury - dawno nie była stosowana, jest słabo utrwalona, nie bazuje na rozumieniu
np. dzielenie ułamka przez ułamek – mnożenie przez odwrotność dzielnika
- zapominanie elementu procedury - (osłabiona pamięć operacyjna)
np. zapominanie o przeniesieniu 1 do wyższego rzędu (informacja przechowywana w pętli fonologicznej);
nieuwzględnianie zasad dotyczących kolejności wykonywania działań

$$3 + 4 \cdot 5 =$$





Pamięć operacyjna

- Pamięć operacyjna – system pamięciowy, odpowiedzialny za przejściowe magazynowanie i przetwarzanie treści pamięciowych.
- Centralny system wykonawczy – komponent pamięci operacyjnej – nadzorujący system kontroli,
 - koordynuje aktywność obu systemów zapamiętywania, z których jeden zajmuje się przetwarzaniem materiału werbalno-fonologicznego (pętla fonologiczna), a drugi materiału wzrokowo-przestrzennego.





Deficyty proceduralne

- stałe i systematyczne popełnianie błędów w wyniku nieprawidłowego przyswojenia elementów wiedzy proceduralnej – błędy dydaktyczne, uproszczenia, własne błędne strategie,
 - odejmowanie zawsze liczby mniejszej od większej

$$27-13=14$$

$$24-17=13$$

$$27-13=(20-10)+(7-3)=14$$

$$24-17=(20-10)+(7-4)=13$$

- Alternatywny algorytm:

Odejmuj dziesiątki od dziesiątek a jedności od jedności.

Jeżeli liczba jedności jest większa w odjemnej niż w odjemniku to wynik dodaj do dziesiątek.

Jeżeli liczba jedności jest mniejsza w odjemnej niż w odjemniku to wynik odejmij od dziesiątek.





Deficyty proceduralne

- kolejność wykonywania działań – dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie

$$5 \cdot 4 : 2 \cdot 4$$

- Błędy stałe i systematycznie popełniane – błędnie przyswojone procedury.
- Błędy nietrwałe, spowodowane deficytami w zakresie kontroli umysłowej procesu wykonywania obliczeń.





Koncepcyjna wiedza arytmetyczna

- Koncepcyjna wiedza arytmetyczna to rozumienie działań arytmetycznych, a także prawidłowości i algorytmów, leżących u podstaw tychże działań.

$$12 \cdot 4 = 48$$

$$4 \cdot 12$$

$$12 + 12 + 12 + 12$$

- Uczeń nie pamięta ile jest $4 \cdot 9$ (deficyt wiedzy o faktach).
- Radzi sobie licząc $(2 \cdot 9) + (2 \cdot 9)$ – właściwa wiedza koncepcyjna.





Deficyty wiedzy koncepcyjnej

$$35 \cdot 12 = 3570$$

$$35 \cdot 1 = 35$$

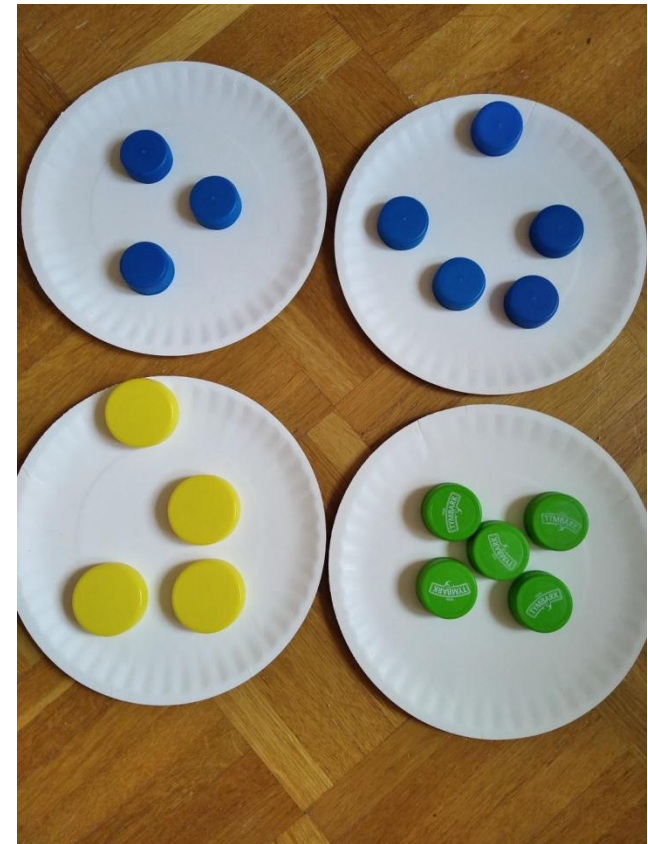
$$35 \cdot 2 = 70$$

- stąd wynik 3570
- Elementy wiedzy proceduralnej zachowane, deficyt wiedzy koncepcyjnej.



Rozumienie systemu liczbowego – zadania diagnostyczne

1. Subitacja
2. Szacowanie
3. Liczenie "w górę":
 - po jeden
 - po dwa
 - po pięć
 - po dziesięć
3. Liczenie "w dół"
4. Czytanie liczb
5. Zapisywanie liczb
6. Dodawanie jeden, dodawanie dwa
7. Odejmowanie jeden, odejmowanie dwa
8. Rozpoznawanie układów kropek





Rozumienie systemu liczbowego – zadania diagnostyczne

9. Podwajanie

- do 10
- do 20

10. Dopełnianie do 10

11. Dopełnianie do najbliższej pełnej dziesiątki

12. Przekraczanie progu dziesiątkowego

13. Mnożenie w obrębie tabliczki mnożenia

14. Dzielenie w obrębie tabliczki mnożenia

15. Tworzenie zapisu matematycznego

