

Dzieci i ich doświadczenia z matematyką – badacze, odkrywczy czy naśladowcy i odtwórcy?

Prof. ucz. dr hab. Małgorzata Żytko
Uniwersytet Warszawski
Wydział Pedagogiczny
mzytko@uw.edu.pl

Refleksja 6-latka

Matematyka jest nudna – na lekcjach za
dużo czasu zajmuje podawanie odpowiedzi a za
mało uczenie się!

Boaler (2016) *Mathematical mindsets*

Refleksje uczniów z „Bąbla bydgoskiego”

(M. Glaza, Dzieci i rodzice o edukacji matematycznej)

- ▶ *Matma to jest dla mnie taki relaks, taki jakby masaż, ale nie prawdziwy (masaż mózgu).*
- ▶ *Najbardziej lubię mnożenie, żywe liczby i właściwie wszystko, tylko żeby nie było łatwe...*
- ▶ *Robimy bardzo fajne rzeczy, często robimy „bąblową matematykę”, piszemy na planszach, rozwiązujemy zadania, są klocki, czasami się bawimy, robimy własne kalkulatory, gramy w gry matematyczne...*
- ▶ *Czasami mamy takie zabawy, że jesteśmy zaskoczeni, że to jest matma.*



Bydgoski bąbel matematyczny

O wprowadzaniu zmian w nauczaniu
matematyki w klasach I–III



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

IBE



BADANIA
UMIEJĘTNOŚCI
TRZECIOKLASISTÓW

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



OBLICZA MATEMATYKI – tradycja filozoficzna



Matematyka nauką aprioryczną – poszukiwanie odpowiedzi na pytania dotyczące abstrakcyjnych bytów matematycznych, wzór wiedzy pewnej.



Poznanie matematyczne ma charakter czysto racjonalny, niezależny od sfery empirycznej

ZWIĄZEK MATEMATYKI Z NAUKAMI EMPIRYCZNYMI

► Willard V. O. Quine – realizm

matematyka nie może być ujmowana jako autonomiczna, oderwana od ludzkiej działalności poznawczej; poznanie matematyczne jest zapośredniczone w naukach empirycznych (matematyka niezbędna w naukach empirycznych)

H. Steinhaus (1989) we wstępie do *Kalejdoskopu matematycznego* napisał: przedmiotem matematyki jest rzeczywistość, matematyka jest uniwersalna: nie ma rzeczy, która by była jej obca

Rueben Hersh

- ▶ *The Mathematical Experience*

Matematyka to działalność ludzka, zjawisko społeczne, część ludzkiej kultury, historycznie wyewoluowane i zrozumiałe tylko w kontekście społecznym. Obiekty matematyczne są tworzone przez ludzi, nie arbitralnie, ale z aktywności z istniejącymi obiektami matematycznymi oraz z potrzeb nauki i życia codziennego.

M. Żytko, *Aktywność matematyczna dzieci – odkrywanie czy odtwarzanie*. w: red. T. Przybyła, *Liczby w cyfrowym świecie. Rozmowy o współczesnej edukacji matematycznej dziecka* (2021)

W czasie, jaki szkoły przeznaczają na naukę matematyki, bardzo niewiele (jeśli w ogóle) zajęć poświęca się na próbę wytłumaczenia, czego dotyczy ten przedmiot. Zamiast tego nacisk położony jest na uczenie i stosowanie różnych procedur rozwiązywania problemów matematycznych.

To trochę tak, jakby opisywać piłkę nożną jako „serię manewrów nakierowanych na umieszczenie piłki w bramce”. Jest to precyzyjny opis pewnych kluczowych zagadnień, który jednak nie uwzględnia odpowiedzi na ogólne Pytania „co?” i „jak?” (Devlin, 2012, s. 15).

Devlin, K. (2012). *Myślenie matematyczne. Twój nowy sposób pojmowania świata.*

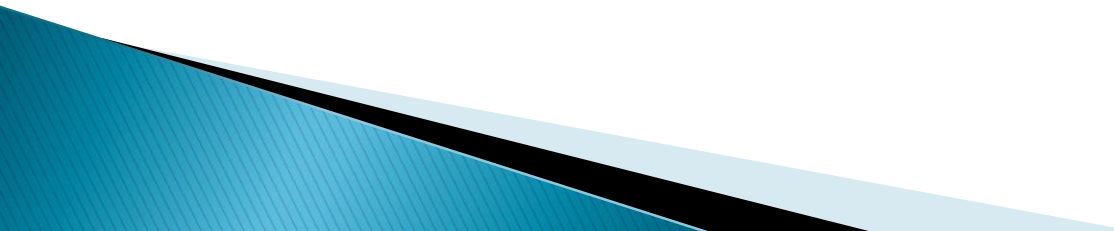
H.Freudenthal (1983)

matematyka jest naturalną działalnością społeczną, rozwijającą się w miarę wzrostu osobnika i jego rosnących potrzeb w rozszerzającym się dlań świecie. Matematyka jest postawą, sposobem opanowywania tego świata poznawczo, praktycznie i emocjonalnie
(Freudenthal:125)

UCZENIE SIĘ MATEMATYKI

- ▶ **na poziomie rozumienia instrumentalnego** (algorytmicznego): uczeń wie, jaki schemat działania w danej sytuacji należy zastosować, trenuje go w typowych sytuacjach,
- ▶ **na poziomie rozumienia relacyjnego**: uczeń dostrzega związki między poznawanymi pojęciami i rozumie, dlaczego stosowane przez niego procedury funkcjonują w taki, a nie inny sposób,

G.Polya, I.Lakatos, H.Freudenthal



CECHY PROCESU KONSTRUOWANIA WIEDZY

- ▶ Aktywność
- ▶ Kontekstowość
- ▶ Rola konfliktu poznawczego
- ▶ Społeczny charakter

Nauczanie –uczenie się: konflikt poznawczy,
badanie i studiowanie problemu, negocjacje
społeczne= wiedza w umyśle

(J. Bruner, L. Wygotski, J. Boaler)



UCZENIE SIĘ MATEMATYKI

Jo Boaler, Carol Dweck, Anna Sfard

<https://www.youcubed.org/>



- ▶ **Matematyka jest o związkach, relacjach i komunikacji. Matematyka to struktura i forma komunikacji. Konieczne przedstawianie matematyki w różnych formach**
- ▶ **Głębia analizy ważniejsza niż szybkość rozwiązań. Wybitni matematycy myśleli wolniej i głębiej**
- ▶ **Matematyka to proces uczenia się a nie tylko wynik. Matematyka wymaga czasu, uczenie się to proces.**
- ▶ *J. Boaler, **Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching** 2016*
- ▶ *A. Sfard, **Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing.** 2009*

Narodowa Strategia Edukacji Matematycznej Wielkiej Brytanii

- ❑ matematyka jest zbudowana z pojęć, uogólnień, definicji, które swoje źródło mają w obserwacji świata, odkrywaniu zasad nim rządzących i nadawaniu im określonej formuły;
- ❑ matematyka obejmuje mierzenie, porównywanie i klasyfikowanie/porządkowanie obiektów, zaś dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie pełnią służebną funkcję w stosunku do wymienionych działań, umożliwiając ich wykonanie;
- ❑ matematyka opisuje relacje, reguły, właściwości, uogólnione zasady, które można odkryć;
- ❑ matematyka zapewnia dotarcie do abstrakcyjnego myślenia i działania z wykorzystaniem wyobraźni.

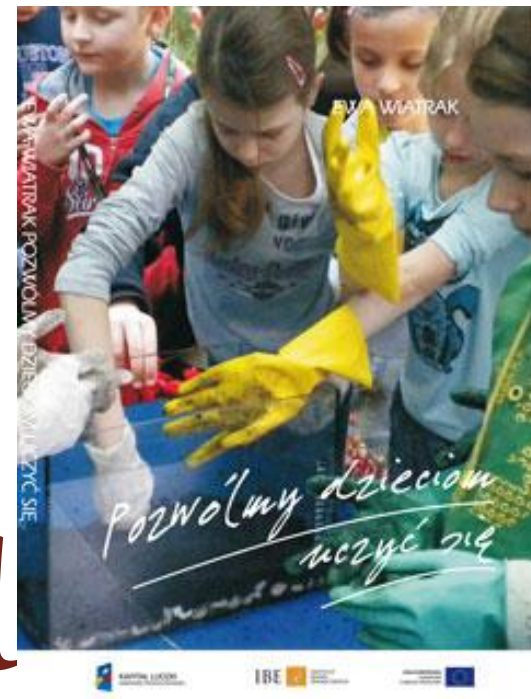
UCZENIE SIĘ MATEMATYKI

Skuteczny nauczyciel powinien odwoływać się do metod, którymi posługuje się samo dziecko, aby nadać ład i strukturę poznawaniem materiałowi matematycznemu

R. Fischer, Uczymy się myśleć, WSiP 1999

Pozwólmy
DZIECIOM

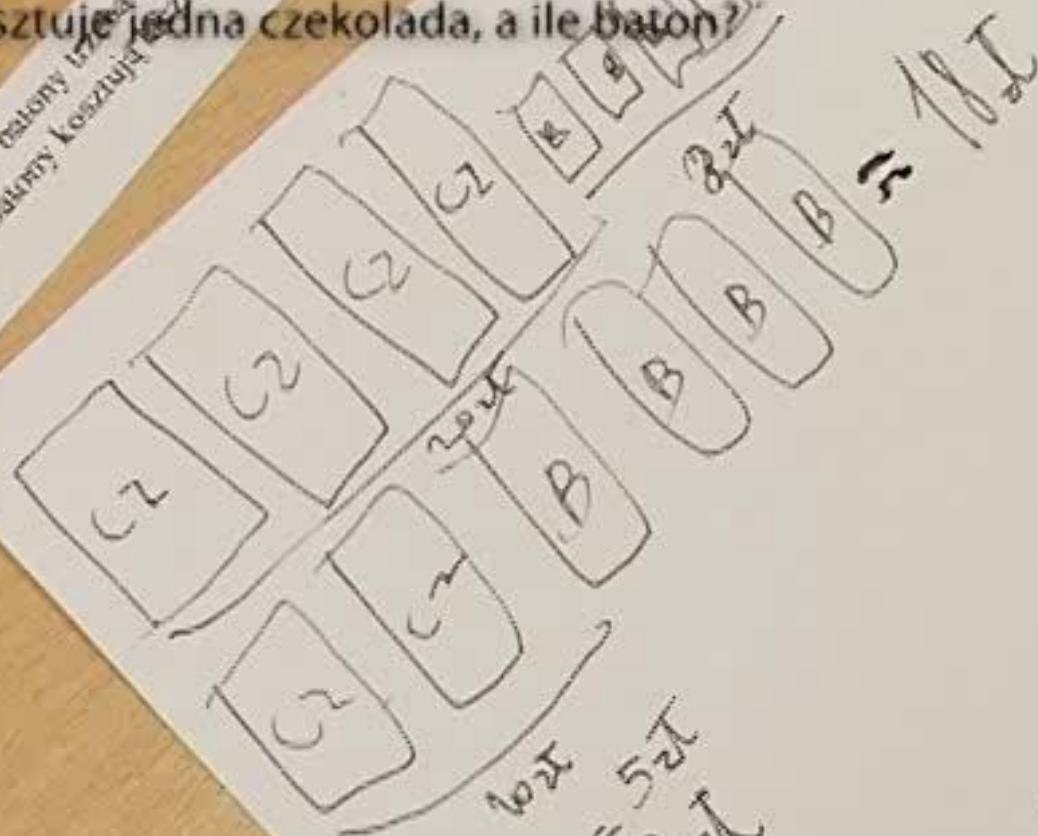
działać!



Za 4 czekolady i 4 batony trzeba zapłacić 28 zł.

2 takie same czekolady i cztery takie same batony kosztują łącznie 18 zł.

Ile kosztuje jedna czekolada, a ile baton?



$$\begin{aligned} 4Cz &= 28\text{ zł} \\ 2Cz &= 9\text{ zł} \\ 4Bat &= 18\text{ zł} \end{aligned}$$

$$Cz = 7\text{ zł}$$

$$\begin{aligned} 4Bat &= 18\text{ zł} \\ Bat &= 4.5\text{ zł} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4Cz &= 28\text{ zł} \\ Cz &= 7\text{ zł} \end{aligned}$$

Za 4 czekolady i 4 batony trzeba zapłacić 28 zł.
2 takie same czekolady i cztery takie same batony
kosztują łącznie 18 zł.
Ile kosztuje jedna czekolada, a ile baton?


 $4C + 4B = 28 \text{ zł}$


 $2C + 4B = 18 \text{ zł}$

$4C = 28 \text{ zł} - 4B$

$2C = 18 \text{ zł} - 4B$

$4C = 2(18 \text{ zł} - 4B)$

$4C = 36 \text{ zł} - 8B$

$36 \text{ zł} - 8B = 28 \text{ zł} - 4B$

$36 \text{ zł} - 28 \text{ zł} = -4B + 8B$

$8 \text{ zł} = 4B$

$8 \text{ zł} : 4 = 2 \text{ zł}$

$B = 2 \text{ zł}$

$4C = 28 \text{ zł} - 4 \cdot 2 \text{ zł}$

$4C = 28 \text{ zł} - 8 \text{ zł}$

$4C = 20 \text{ zł}$

$20 \text{ zł} : 4 = 5 \text{ zł}$

$C = 5 \text{ zł}$

Relacyjne podejście do uczenia się matematyki

- ▶ odkrywanie matematycznych zasad, dostrzeganie prawidłowości, stosowanie własnych strategii rozwiązania,
- ▶ N. zainteresowany sposobem myślenia dzieci w sytuacjach problemowych, pozwala na popełnianie błędów, które są zwykle początkiem uczenia się, zgłębiania problemu.

UCZENIE SIĘ MATEMATYKI (modelowanie myślenia)

- aktywność intelektualna dzieci jest niezbędna, aby osiągać sukcesy,
- rozumienie matematyki wymaga budowania modeli sytuacji matematycznych, wizualizacji i manipulowania elementami w praktycznym kontekście.

Edukacja matematyczna

Na zimowisko wyjedzie pociągiem 135 dzieci. Ile trzeba zarezerwować ośmioosobowych przedziałów, by każde dziecko miało miejsce siedzące?

- ▶ *N: Dobrze, ciiii... Jeszcze przeczyta dziewczynka, proszę Marta!*
- ▶ *UM: Na zimowisko wyjedzie pociągiem 135 dzieci. Ile trzeba zarezerwować ośmioosobowych przedziałów, by każde dziecko miało miejsce siedzące?*
- ▶ *N: Tak, bardzo proszę, jakie dane mamy tutaj w tym zadaniu? Czego się dowiedzieliśmy? Jak (...). co takiego tam jest w treści, co przyda nam się do rozwiązania tego zadania? Proszę Damian? Jakie dane znalazłeś? Jaką liczbę znalazłeś?*
- ▶ *UD: 135...*
- ▶ *N: Ale głośno, wyraźnie.*
- ▶ *UO: Znalazłem liczbę 135...*
- ▶ *N: 135 dzieci. (wzmocnionym głosem, UD, stara się podążać głosem za nauczycielem) Dzieci, które trzeba przewieźć pociągiem. Dziękuję, drugą liczbę Robert. Gdzie ukryła się druga liczba? * Gdzie ukryła się druga liczba?*

- ▶ U3: *Osiem.*
- ▶ U4: *Osiem.*
- ▶ N: *Osiem, ośmioosobowych przedziałów, czyli osiem. Czyli, w każdym przedziale tego pociągu można przewieźć osiem osób. Skoro zadanie, to również pytanie! O co pyta autor, Marek?*
- ▶ UM: *Ile trzeba zarezerwować ośmioosobowych przedziałów, by każde dziecko miało miejsce siedzące?*
- ▶ N: *Czy już świta coś w głowie? Mamy jakieś rozwiązanie? Artur, proszę?*
- ▶ UA: *135 trzeba podzielić na osiem.*
- ▶ N: *Tak i to na dodatek sposobem pisemnym.*
- ▶ U1: *Mogę ja?*
- ▶ N: *Bardzo proszę, nie teraz będzie troszeczkę inaczej. Posłuchajcie, uważnie słuchamy, bo pani powie tylko jeden raz. Należy za momencik otworzyć zeszyt, tak jak to zwykle robimy, napisać numer zadania, wpisać dzisiejszą datę, oczywiście i rozwiązać samodzielnie to zadanie. Dzisiaj jest 22 marca (zapisuje na tablicy).*
- ▶ U2: *Pytanie działanie odpowiedź.*
- ▶ N: *Właśnie, my mamy taką swoją zasadę od pierwszej klasy, że rozwiązując zadanie z treścią, robimy, co?*
- ▶ UO: *Pytanie, działanie, odpowiedź.*
- ▶ N: *Olku, właśnie, cieszę się, że już się poprawiłeś. Musimy napisać co?*
- ▶ UO: *Pytanie, działanie, odpowiedź.*
- ▶ N: *Pytanie, działanie, odpowiedź, oczywiście numer zadania i strona musi też być. Samodzielnie, proszę bardzo zabieramy się do pracy.*

Edukacja matematyczna

- ▶ **PRZYKŁAD 2. Edukacja matematyczna**
- ▶ Nauczycielka: **Jakie wy macie pieniądze?**
- ▶ Uczniowie: Stówki.
- ▶ Nauczycielka: **Stówki całe. Kto je trzyma? Iza, jakie macie pieniądze?**
- ▶ Uczeń 1: 200.
- ▶ Nauczycielka: **200. Całe dwie setki. Uwaga. Dla grupy, która ma pięćdziesiątki. To jest rączka w górę. Uwaga. Waszym zadaniem będzie kupić ode mnie plecak turystyczny. Proszę mi [...] płacić. Ja wam, mogę wydawać resztę. Proszę mi zapłacić pieniężkami waszymi.**
- ▶ Uczeń 2: [...] Ale mogę je poprosić?
- ▶ Nauczycielka: **I wy sprawdzacie, a wy się zastanawiacie, ile oni muszą mi zapłacić za ten plecak turystyczny. Proszę mi zapłacić. Dostaję od was ile?**
- ▶ Uczniowie: 150.
- ▶ Nauczycielka: **150 złotych. Czy muszę wam wydać resztę?**
- ▶ Uczeń 1: Tak.
- ▶ Uczeń 2: Tak.

- ▶ Nauczycielka: Słuchajcie. Wydaję resztę, wy sprawdzacie, czy wydaję dobrze. [...] Wydałam Kasi ile reszty?
- ▶ Uczniowie: 30.
- ▶ Nauczycielka: 30 złotych. Czy dobrze wydałam?
- ▶ Uczeń 1: Tak.
- ▶ Uczeń 2: Tak.
- ▶ Uczeń 3: Tak.
- ▶ Nauczycielka: Zadanie dla grupy, która ma dwudziestki. Która grupa ma dwudziestki? Uwaga. Wy kupujecie ode mnie materac dwuosobowy. A wy sprawdzacie, ile kosztuje materac dwuosobowy. Oni mają dwudziestki i liczyć, bo wydaję reszty. [...] Nie [...]. Proszę bardzo. Ile mi płacie?
- ▶ Uczniowie: 90.
- ▶ Nauczycielka: 90 mi płacie? Ile kosztuje materac dwuosobowy? 90. A wy mi płacie?
- ▶ Uczeń 1: 100.
- ▶ Uczeń 2: 100.
- ▶ Nauczycielka: [...] 20, 40, 60, 80, 100. Wydaję wam 10 złotych reszty. Zgadza się?
- ▶ Uczeń 1: Tak.
- ▶ Uczeń 2: Tak.
- ▶ Nauczycielka: Zgadza się. Teraz zadanie dla grupy, która ma dwusetki. Czyli dla tej grupy. Wy kupujecie ode mnie aparat fotograficzny. [...] Płacimy czym? Czym płacimy, Karolinko? Co to są?
- ▶ Uczeń 2: Papierki.
- ▶ Nauczycielka: Ale jak mówimy na pieniążki papierkowe? Banknoty. Proszę bardzo. Ile dostałam? Mieliście materac. [...] Aparat fotograficzny sama muszę sobie znaleźć. 119 złotych I teraz uwaga, pytanie. 20, 40, 60, 80, 1. Czy dobrze wam wydałam? 200 złotych zabieram. 119.
- ▶ Uczniowie: Tak.
- ▶ Nauczycielka: Dobrze wam wydałam? I dla ostatniej grupy. Waszym zadaniem będzie ode mnie kupić namiot dwuosobowy. [...] Namiot dwuosobowy. Ile mi płacie? Ile kosztuje namiot dwuosobowy?
- ▶ Uczniowie: 16.
- ▶ Nauczycielka: Czy wydam Wam resztę?
- ▶ Uczeń 1: Nie.
- ▶ Uczeń 2: Nie.
- ▶ Uczeń 3: Nie.

- ▶ **Nauczycielka:** Co można kupić, mając 100 złotych? Rower? Aparat fotograficzny? Śpiwór dziecięcy czy plecak turystyczny? Już mamy pierwszą grupę. Pokażcie, co napisaliście. I, proszę, wybierzcie.
- ▶ **Uczniowie:** Śpiwór dziecięcy.
- ▶ **Nauczycielka:** Śpiwór dziecięcy. Kto u was idzie wlewać wodę? [...] Skoro tak. Chodź Bartek. [...] kolorem. Proszę bardzo, więc [...] ani więcej, ani mniej, musimy sobie wymieszać. To jest Bartek. Ja będę sprawdzała. Patrz. Patrzymy na działkę i co? Sprawdzam. Pierwsza grupa już zdobywa punkty. Uwaga. Czytam zadanie drugie. Ile trzeba zapłacić za namiot dwuosobowy i krzesło turystyczne z wysokim oparciem? Namiot dwuosobowy i krzesło turystyczne z wysokim oparciem. Nie. Tu jest błąd. [...] Proszę bardzo. 324. [...] Mariusz chyba pierwszy zabrał głos. Damy mu szansę? Jaki macie kolor?
- ▶ **Uczniowie:** Zielony.
- ▶ **Nauczycielka:** Proszę bardzo. Troszeczkę do tyłu i znowu wlewamy 100 mililitrów. Zdobywamy punkt. Zobaczymy, jak Ani się udało. Troszeczkę. Brawo. Prawie idealnie. Dobrze. Uwaga. Czytam zadanie trzecie. O ile złotych jest droższy namiot czterosobowy od namiotu dwuosobowego? O ile złotych? Na kartce [...] jest już napisane. [...] Brawo. Kasia. [...] Jaki macie kolor Kasia? Proszę bardzo. [...] To po. Dobrze. Umówmy się, że troszeczkę przelane to odlejemy. [...] odlej, Kasiu. Troszeczkę. Sprawdzamy teraz. Teraz troszeczkę za mało. To musisz dodać. [...] uczymy się, prawda? Jeszcze, Kasiu. Jeszcze troszeczkę. Jeszcze. Brawo. Prawie idealnie. Uwaga. Zadanie czwarte. O ile złotych jest tańszy śpiwór od materaca dwuosobowego? Szukamy. [...] Śpiwór od materaca dwuosobowego. Już mamy Marysię. Proszę bardzo. Pokaż. Brawo. I ty dla swojej grupy nalewasz. [...] Pracujcie wspólnie, bo. Tak. Czyli jak było 100 mililitrów, to musi być, brawo, musi być 200. Tak [...], prawda? [...] dobrze. Prawie idealnie. Uwaga. Grupa pracuje wspólnie, bo jeszcze nie macie punktu, ale wszystko przed wami. Prawda?
- ▶ **Uczniowie:** Tak.
- ▶ **Nauczycielka:** Uwaga. Ile trzeba zapłacić za namiot dwuosobowy i materac dwuosobowy? Napisałaś? Podniosła pierwsza Edytka rączkę. Proszę bardzo. Po ile?
- ▶ **Uczeń 3:** 300 złotych
- ▶ **Nauczycielka:** Brawo. [...] I pierwsze punkty. Brawo. Aż się grupa cieszy, prawda? Lej, Edytko. Jeszcze. Dobra. Idealnie. Prawie idealnie.
- ▶ **M. Żytko , Edukacja językowa w szkole – między dążeniem do formalizacji schematu a refleksją w zdarzeniach komunikacyjnych. W: D. Klus–Stańska (red), (Anty) edukacja wczesnoszkolna, Impuls Kraków 2014**

PROCES DYDAKTYCZNY

D. KLUS-STAŃSKA

- ▶ Nauczyciel: *przekazuje, zapoznaje, wdraża, kształtuje* itd.
- ▶ Nauczyciel: *organizuje środowisko uczące, stawia problemy*
- ▶ Uczeń: *przyswaja, powtarza, ćwiczy, utrwała* itd..
- ▶ Uczeń: *bada, eksploruje, próbuje, sprawdza, gromadzi dane* itd.

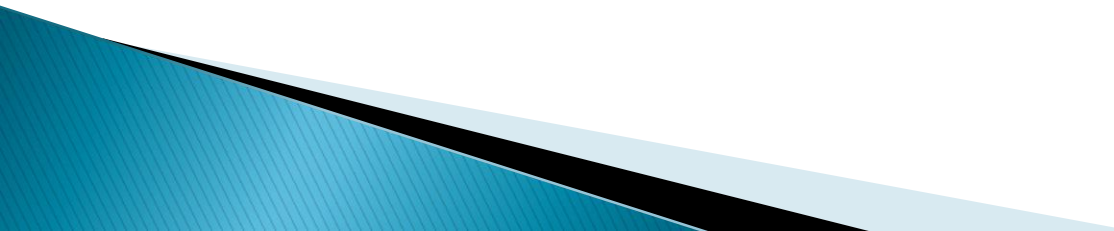
Transmisja

Konstruktywizm

PRACA SAMODZIELNA (TRANSMISJA)

- wymaga wcześniejszego wyuczenia się podstaw
- występuje pod koniec uczenia się nowego materiału
- jest zgodna z poznaną instrukcją

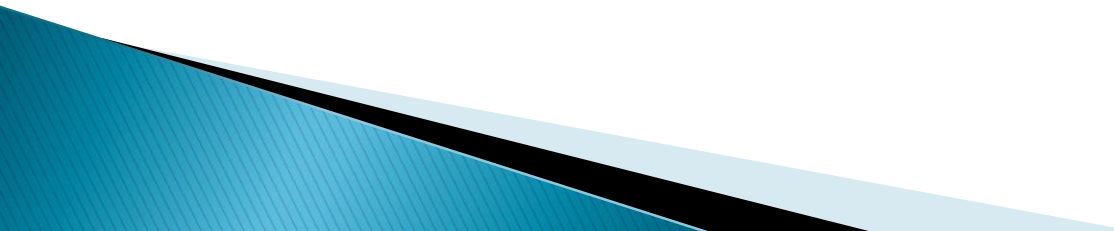
Poczekam aż się dowiem, jak to robić



PRACA SAMODZIELNA (KONSTRUKTYWIZM)

- nie wymaga wcześniejszego „wyuczenia się” podstaw
- występuje na początku uczenia się nowego materiału
- własne strategie, poszukiwanie metodą prób i błędów
- nie jest możliwa przy instrukcji z kontrolą zewnętrzną

Nie wiem, jak to zrobić, ale pokombinuję i coś wymyślę







	2	3	4	5		7	8		10
11	12		14	15	16	17	18		20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100







NUMERACY

1 2 3

5 7 8 9 10 11 12 13 14

16 17 18

20 21 22 23 24

How far can you count?

How many ways can you make 10? Use the cards to help you.

Can you sing a number rhyme?

Can you put the numbers in the correct order?

Fire exit
Keep clear

WSPÓŁDZIAŁANIE I WSPÓŁPRACA



PRACA w PARACH



Radowo Małe

- ▶ <https://www.ibe.edu.pl/pl/aktualnosci/414-kuchnia-teatr-podroze-ibe-pokazuje-jak-kazda-szkola-moze-uczyc-male-dzieci>







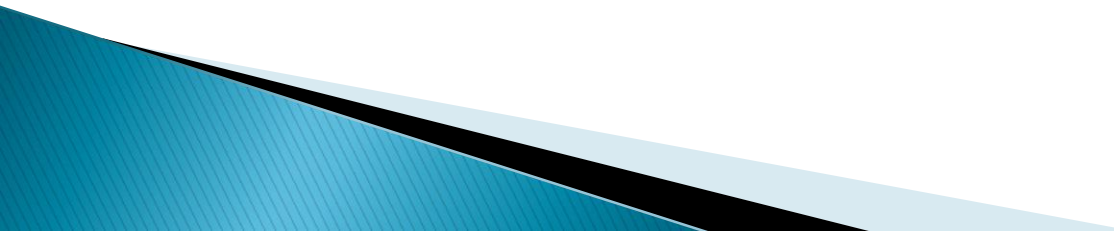








Uczenie się matematyki w interakcjach społecznych

- ▶ Zawrzyj z uczniami umowę na temat zasad uczenia się
 - ▶ Wyjaśnij uczniom, czego oczekujesz
 - ▶ Zachęcaj do pracy w parach, grupach
 - ▶ Doceniaj, respektuj pomysły dzieci
 - ▶ Organizuj dyskusję na temat rozwiązań
 - ▶ Stawiaj wyzwania
 - ▶ Zachęcaj do refleksji
- 

Rozwiązywanie problemów matematycznych w różnorodny sposób:

- ▶ **materialny**, z wykorzystaniem działań na konkretnych materiałach (klockach, żetonach, monetach itp., obiektach materialnych, przyrządach, np. waga, termometr), pomagające w budowaniu modeli sytuacji matematycznych czy problemu;
- ▶ **wizualny**, przedstawianie problemów w obrazowy sposób, wizualizacje, wykorzystywanie wyobraźni przestrzennej, rysunki, komunikacja graficzna,
- ▶ **werbalny**, wyjaśnianie strategii, argumentowanie, przekonywanie innych do własnego rozwiązania, dyskusja, opisywanie myśli w dzienniku

9. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Droga ma 130 metrów długości. Ile drzewek posadzono?

$$130 : 10 = 13$$

Odpowiedź: Posadzone 13 drzewek.

16.6%

9. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Droga ma 130 metrów długości. Ile drzewek posadzono?

$$130 \cdot 10 = 1300$$

Odpowiedź: po pozostalo 1300 drewniek do posadzenia.

$$130 \text{ m} - 10 \text{ m} = 120 \text{ m}$$

Odpowiedź: Posadzono 120 drzewek.

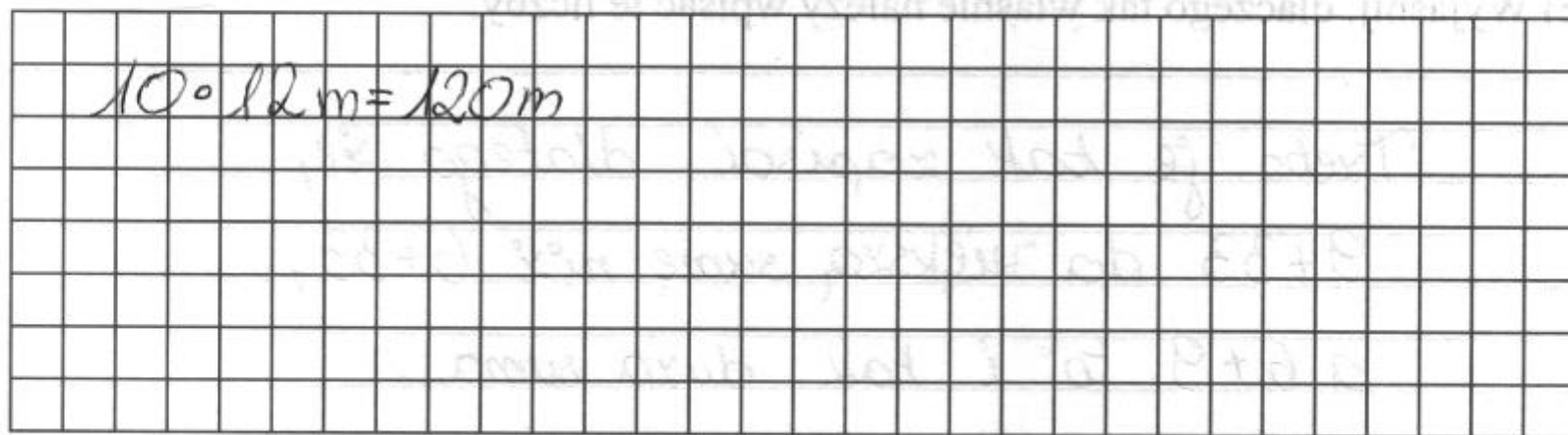
$$\begin{array}{r} 130 \\ + 10 \\ \hline 140 \end{array}$$

Posadzono 140 drzewek.

$$\begin{array}{r} 130 \text{ m} \\ 10 \text{ m} \\ \hline 130 \end{array}$$

Odpowiedź: Posadzono 130 drzewek.

6. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaką długość ma ta droga?



10 • 12 m = 120 m

Odpowiedź: Ta droga ma 120 metrów.

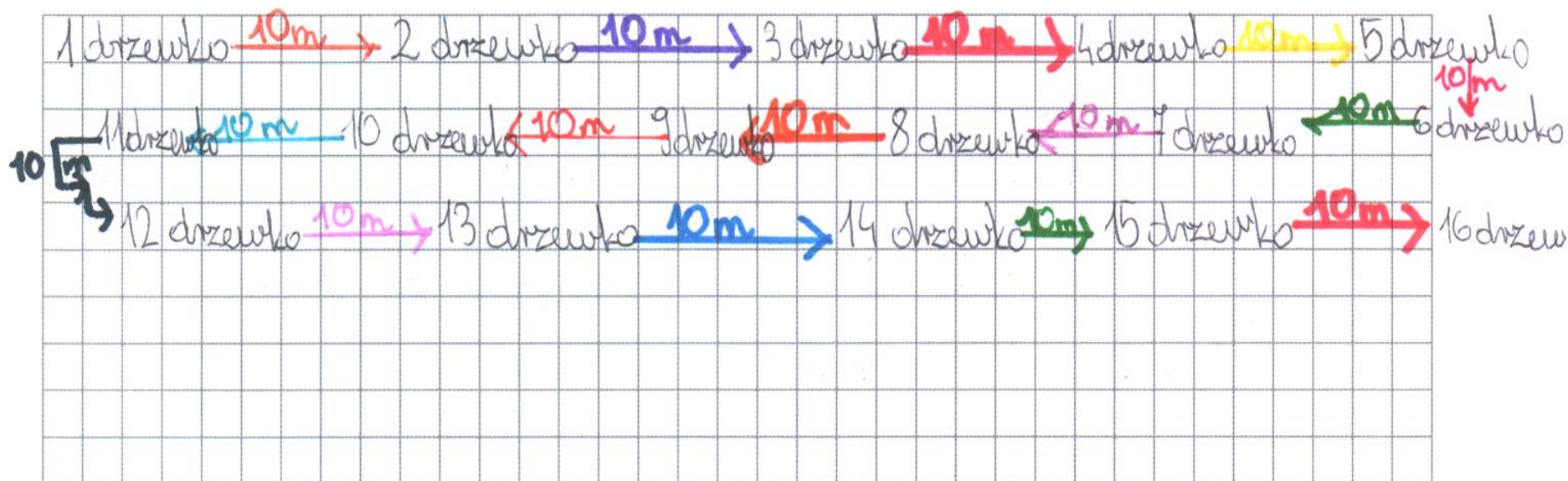


3,0%

9. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka.

Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu.

Droga ma 150 metrów długości. Ile drzewek posadzono?



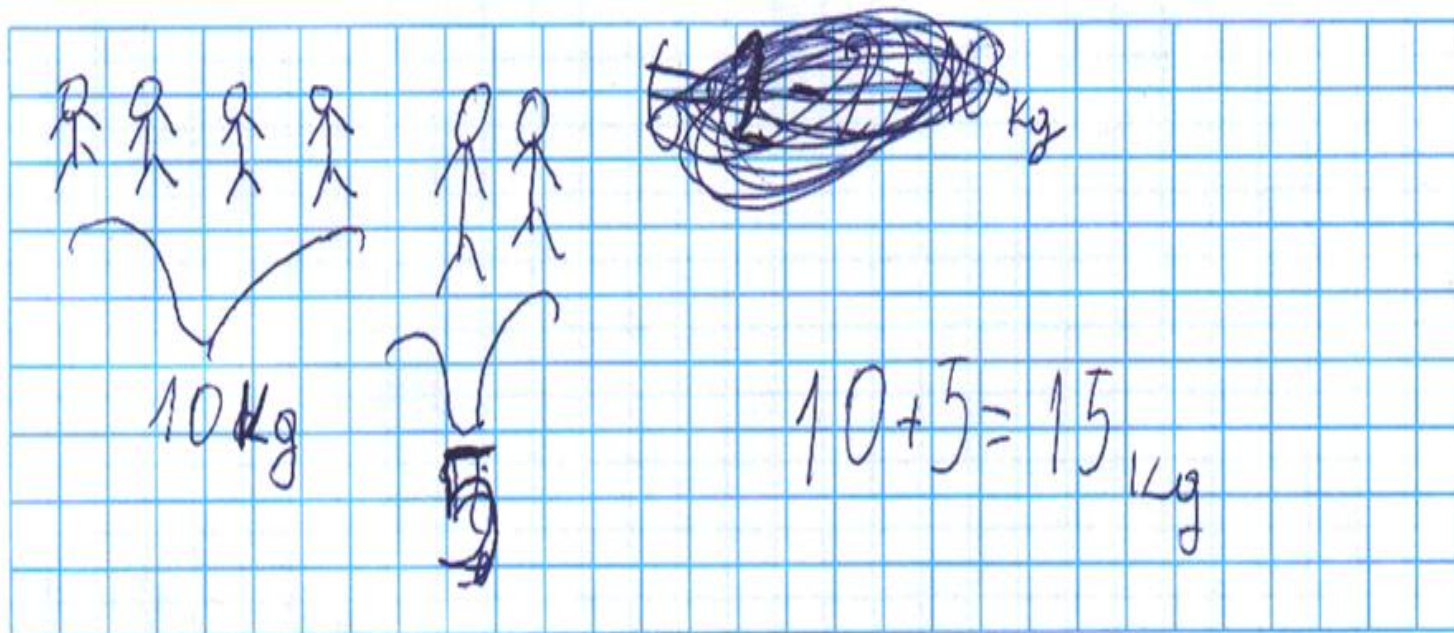
Odpowiedź: Posadzono 16 drzewek.

9. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Droga ma 130 metrów długości. Ile drzewek posadzono?



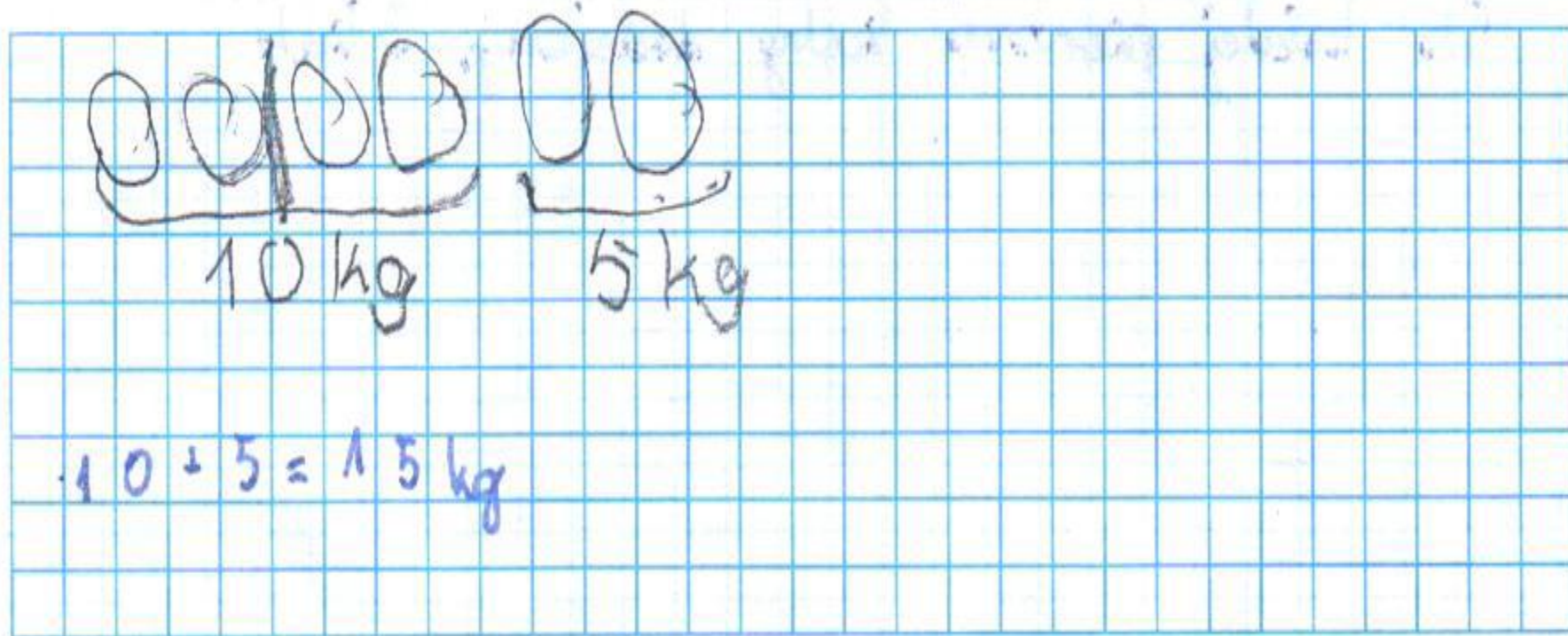
Odpowiedź: Posadzono 14 drzewek.

5. Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg.
Ile ważyłoby łącznie 6 takich krasnali?



Odpowiedź: 6 takich krasnali waży 15 kg.

5. Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg.
Ile ważyłoby łącznie 6 takich krasnali?



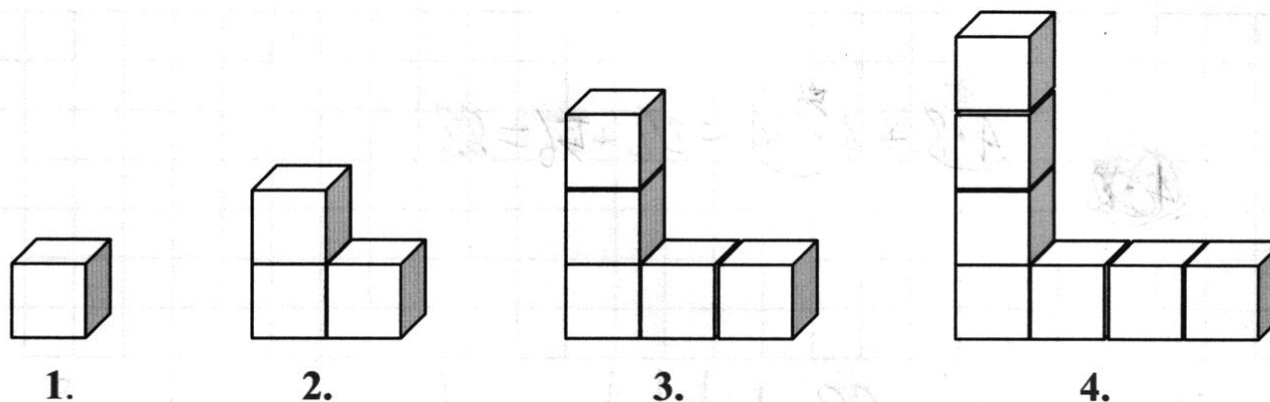
Odpowiedź: 6 takich krasnali łącznie ważyło 15 kg

5. Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg.

Ile ważyłoby łącznie 6 takich krasnali?

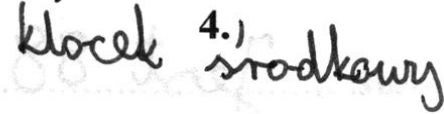
$$6 \cdot 10 \text{ kg} = 60 \text{ kg}$$

Odpowiedź: Szesć takich krasnali ważyłoby
60 kg



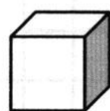
d) Opisz, jak można szybko obliczyć, ile klocków potrzeba do zbudowania dwudziestej budowli z tej serii.

Można szybko obliczyć ponieważ pionowy słupek klocków to także numer budowli. A w poziomie słupku za każdym razem jest o jednego mniej klocka od pionowego słupka

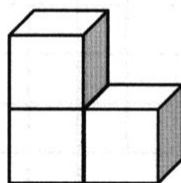

$$1 \cdot 20 + 1 \cdot 20 = 20 + 20 = 40$$

$$1 + 19 \cdot 2 = 1 + 38 = 39$$

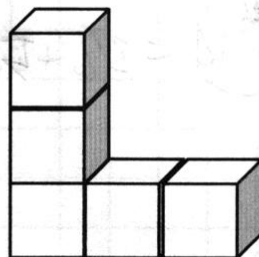
Do pierwszego bloku środkowego dodajemy resztę.



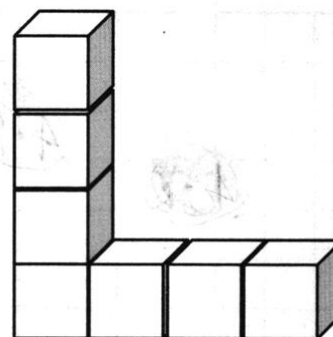
1.



2.



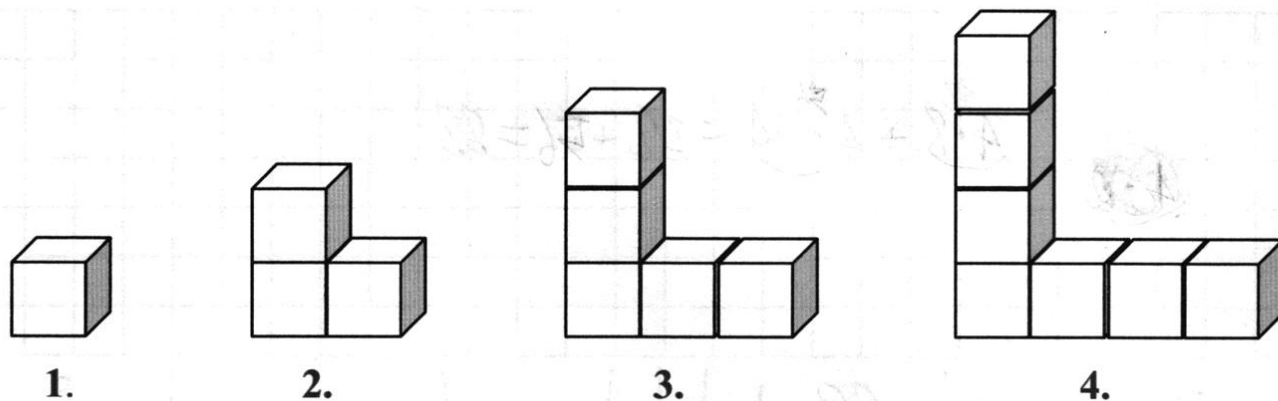
3.



4.

d) Opisz, jak można szybko obliczyć, ile klocków potrzeba do zbudowania dwudziestej budowli z tej serii.

Do tego ~~obliczyć~~ obliczyć 20 budowli z tej serii
trzeba ~~z~~ zrobić takie obliczenie:
 $(20 \cdot 2) - 1 = 40 - 1 = 39$ To jest rozwiązanie.



d) Opisz, jak można szybko obliczyć, ile klocków potrzeba do zbudowania dwudziestej budowli z tej serii.

Przesuwając się kolejno o następną liczbę nieparzystą.

**Tabliczki
suchościernalne**



**Na płycie CD
Scenariusze lekcji
i sprawdziany wiedzy**



Wagi



Gry



Naklejki



**Programy
komputerowe**



Żetony



**Piktogramy
uczniowskie**



**Piktogramy
demonstracyjne**



Gramy w piktogramy



Domino



Stemple







7,50 zł



6 zł



6 zł



6 zł



5 zł



9 zł



8 zł



8 zł



9 zł



10 zł



9 zł



11 zł

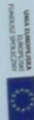
ij ig 6 et

g ij 5 et

j w w g et



KAPITAŁ LUDZKI
Kształcenie i rozwój człowieka



Wzrost i rozwój
społeczności

NUO
TUTAS

NUO
TUTAS

• • • } - 7,50 zł

• • } 8

• •

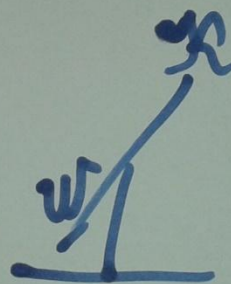
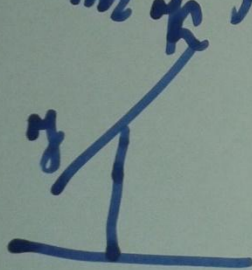
zapko 1,50

gruszka 2 zł

winogrona 3 zł

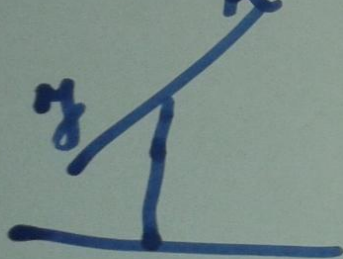
- ▶ Podstawowe metody rozwiązywania układów równań: eliminacji i odejmowania stronami.

Janek zebrał więcej kasztanów
niż Karol



➤ Janek zebrał więcej kasztanów niż Wojtek, a Wojtek zebrał więcej niż Karol. Kto zebrał więcej kasztanów: Janek czy Karol?

Janek zebrał więcej kasztanów
niż Karol



➤ Janek zebrał więcej kasztanów niż Wojtek, a Wojtek zebrał więcej niż Karol. Kto zebrał więcej kasztanów: Janek czy Karol?

1.



2.



3.



4.









KOLEJNE ZADANIE

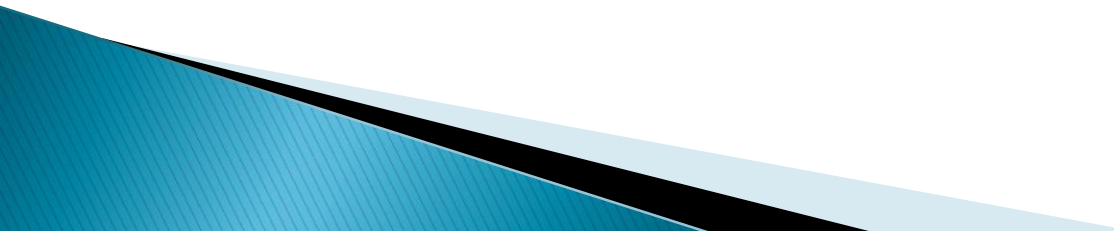
„Odejmij 2 od swojej liczby i stań na wyniku.”

Okazało się, że liczby Jeden i Dwa znalazły się poza planszą.

Liczba Dwa powiedziała, że jest Zerem i nie znajduje się na planszy.

Jeden wyjaśnił, że dla niego też nie ma miejsca, ponieważ teraz jest **Minus Jeden**.

Ponieważ pojawiła się liczba ujemna, nauczyciel zapytał:
„Co to znaczy, że to jest -1 ?”





W pewnym momencie Sandra stanęła na liczbie 95,
a Mateusz skomentował:

„Gdyby Wojtek tu był, musiałby stanąć na 100.”

Julka natychmiast powiedziała:

„Ale zamiast Wojtka może tam stanąć nauczyciel.” — więc nauczyciel stanął.

Rozpoczęła się dyskusja o tym, co widać na planszy z liczbami:

Weronika powiedziała:

„Utworzyły się dwa rzędy.”

Daria dodała:

„Między nami w rzędach jest odległość 5 — pięć pól.”

Karol powiedział:

„Wiem, dlaczego są dwa rzędy — to co 5, a w pionowych rzędach co 10.”

Potem czytaliśmy po kolei liczby w pierwszym i drugim rzędzie.

Na koniec Weronika podsumowała:

„To jest 20 razy 5, czyli 100.”

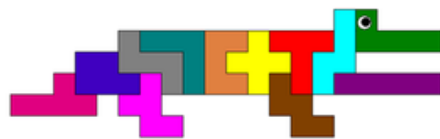
A Marta dodała:

„To też 10 razy 10, a to też 100.”

Dzieci dalej liczyły po piątkach, odczytując liczby, na których się zatrzymywały.

Troje z nich miało trudności z ustaleniem, od której liczby zacząć liczenie po piątkach, więc pozostali uczniowie im pomogli.

UCZENIE SIĘ PRZEZ ODKRYWANIE



CROCODILE



DEER



DOG 1



DOG 2



DOG 3



UCZENIE SIĘ PRZEZ ODKRYWANIE



discovery maths







Bydgoski bąbel matematyczny

O wprowadzaniu zmian w nauczaniu
matematyki w klasach I–III



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

IBE



BADANIA
UMIEJĘTNOŚCI
TRZECIOKLASISTÓW

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



BUDOWANIE ROZUMIENIA W INTERAKCJACH SPOŁECZNYCH

JAKUB: Czy każde działanie można rozwiązać?

N: A co rozumiesz przez określenie „każde działanie”?

JAKUB: No na przykład takie jak $6 - 8 = ?$

N: No właśnie, jak myślicie, czy to działanie można rozwiązać?
(długa cisza, dzieci myślą)

KASIA: To będzie -2

U: Spróbuj wytłumaczyć wszystkim, skąd wzięło się to -2 ?

- ▶ **KASIA:** Dobrze – To jest tak. Mam 6 lizaków, ale Jankowi muszę oddać 8 lizaków. Oddaję mu teraz te 6, a te 2 mam jeszcze do oddania, taki dług, czyli minus
- ▶ **MIKOŁAJ:** To znaczy, że kiedy od mniejszej liczby odejmuję większą, to wynik będzie na „długu”, to znaczy na minusie.

WAŻENIE

- ▶ *Mateusz zauważył, że na paczce jest podana waga 250 g. Po krótkiej dyskusji Oskar powiedział, że musi to być waga samej kawy i w ten sposób doszliśmy do pojęć netto, brutto, tara. Te pojęcia na dobre zadomowiły się w klasie. Gdy sprawdzaliśmy, ile waży 1 litr wody, a nasze próby nie były zbyt dokładne, na moje pytanie:*
- ▶ *Dlaczego musiałam dolewać lub odlewać trochę wody? Kuba: Bo pani ważyła brutto, wodę razem z butelką.*
- ▶ *Po lekcjach z ważenia uczniowie ustalili kolejne prawa:*

- ▶ *prawa Artura „Jak ważymy rzeczy, gdy waga idzie na dół, to coś jest cięższe, a jak w górę, to jest lżejsze”; „Jeżeli coś jest lżejsze, to druga rzecz jest cięższa”*
- ▶ –
- ▶ *prawa Kuby „Pół kilograma piszemy 0,5 kg”.*
- ▶ –
- ▶ *prawa Kuby, Natalii i Klaudii „Waga towaru to netto. Waga opakowania to tara. Waga towaru i opakowania to brutto”*
- ▶ –
- ▶ *prawa Oskara Ł. „Odważniki są takie same jak monety 1 kg, 2 kg, 5 kg”.*
- ▶ –
- ▶ *prawa Zuzi „Bez zera nie byłoby 10, 20, 30 i nieskończoności”.*
- ▶ –
- ▶ *prawa Olimpii „Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nazywamy jednościami. Liczby w woreczkach po 10 nazywamy dziesiątkami”*

BUDOWANIE ROZUMIENIA

M. Cikorska kl. I



Liczby parzyste i nieparzyste układają się na zmianę: nieparzysta, parzysta, nieparzysta, parzysta itd.

Liczby parzyste rosną o 2, bo jest 2, 4, 6, 8, 10... Liczby nieparzyste też rosną o 2, bo jest 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15



Liczby parzyste

12, 14, 100,
400, 16, 50,
56, 76, 62, 66,

Liczby nieparzyste

11, 401, 15,
95, 33, 13,
83, 19, 9, 89,
7, 41,

Badanie liczb i odkrywanie prawidłowości

$$10 + 10 = 20$$

$$2 + 2 = 4$$

$$8 + 2 = 10$$

$$4 + 4 = 8$$

$$4 + 2 = 6$$

$$10 + 4 = 14$$

$$6 + 2 = 8$$

$$2 + 8 = 10$$

$$1 + 2 = 3$$

$$5 + 2 = 7$$

$$10 + 1 = 11$$

$$14 + 1 = 15$$

$$3 + 2 = 5$$

$$40 + 1 = 41$$

$$6 + 1 = 7$$

$$8 + 1 = 9$$

$$4 + 4 = 8$$

$$2 + 2 = 4$$

$$50 + 50 = 100$$

$$6 + 6 = 12$$

$$6 + 2 = 8$$

$$10 + 10 = 20$$

$$3 + 3 = 6$$

$$5 + 5 = 10$$

$$9 + 1 = 10$$

$$4 + 1 = 5$$

$$5 + 3 = 8$$

$$7 + 7 = 14$$

Twierdzenie Pawła: Jeżeli do liczby parzystej dodam liczbę parzystą, to otrzymam liczbę parzystą.

Twierdzenie Filipa: Jeżeli do liczby nieparzystej dodam liczbę nieparzystą, to otrzymam liczbę parzystą.

Twierdzenie Szymona: Jeżeli dodam liczbę parzystą i nieparzystą, to otrzymam liczbę nieparzystą.

Grupa 1.: Paweł, Karina, Patrycja; Grupa

$$\begin{aligned} l.p. - l.p. &= ? \text{ mam 10 zł.} \\ 14 - 12 &= 2 \text{ jeżeli} \\ 4 - 2 &= 2 \text{ odejme} \\ 6 - 4 &= 2 \\ 8 - 2 &= 6 \\ 10 - 2 &= 8 \\ 102 - 0 &= 102 \\ 200 - 2 &= 198 \\ 24 - 2 &= 22 \\ 20 - 2 &= 18 \\ 40 - 0 &= 40 \end{aligned}$$

Jeżeli odejme od l.p., l.p.
bądź l.p.
Paweł, Karina, Patrycja

Grupa 2.: Filip, Oskar, Wiktoria, Patryk

$$\begin{aligned} l.m. - l.m. &= ? \\ 53 - 43 &= 10 \\ 45 - 15 &= 30 \\ 61 - 31 &= 30 \\ 108 - 53 &= 55 \\ 11 - 5 &= 6 \\ 2 - 3 &= -1 \end{aligned}$$

Jeżeli odejme się
od liczby nieparzystej
nieparzyste to wynik
będzie parzysty

Filip, Oskar, Patryk, Wiktoria.

Grupa 3.: Adrian, Szymon i Michał

$$\begin{aligned} l.m. - l.p. &= ? \\ 3 - 2 &= 1 \text{ Adrian. F} \\ 5 - 4 &= 1 \text{ Szymon. F} \\ 7 - 6 &= 1 \text{ Michał. p} \\ 8 - 1 &= 7 \\ 105 - 4 &= 101 \\ 11 - 1 &= 10 \\ 11 - 1 &= 10 \\ 305 - 4 &= 301 \\ 505 - 4 &= 501 \\ 6001 - 0 &= 6001 \end{aligned}$$

jeżeli od liczby nieparzystej odejme liczbę
parzystą, wypadnie wynik nieparzysty

Grupa 4.: Wanessa, Nadia, Lilka, Zosia

$$\begin{aligned} 4 - 3 &= 1 \\ 8 - 5 &= 3 \\ 2 - 1 &= 1 \\ 10 - 5 &= 5 \\ 6 - 5 &= 1 \\ 8 - 1 &= 7 \\ 4 - 1 &= 3 \\ 50 - 1 &= 49 \\ 12 - 9 &= 3 \end{aligned}$$

Jeżeli od liczby parzystej
odejmiemy liczbę nieparzystą
to wynik będzie nieparzysty.

Wanessa, Nadia, Lilka, Zosia

Dzieci tworzą prawa

(Izabela Boroń – nauczycielka nauczania zintegrowanego w Bydgoszczy)

- **Prawo Zuzi:** Liczbę w zdaniu trzeba napisać w środku lub na początku, bo wtedy zdanie jest poprawne. Gdy liczba jest na końcu to zdanie jest niepoprawne.
- **Prawo Patrycji:** – Banknoty mają na końcu zero.
- **Prawo Wiktora:** W każdym pieniądzu jest napis zł.

Dzieci tworzą prawa

Prawo Zuzi – Gdy chcesz odjąć od mniejszej liczby większą, to wyjdzie ci wynik „-” jakaś liczba. $8-20 = -12$

Prawo Zuzi – Na kwadrat można powiedzieć prostokąt, bo obie te figury mają proste kąty.

Prawo Wiktorii – Kwadrat i prostokąt są z tej samej rodziny, bo mają 4 boki.

- *Bydgoski Bąbel Matematyczny. O wprowadzaniu zmian w nauczaniu matematyki w klasach I-III. IBE 2014*

Dzieci tworzą prawa

- ▶ **Prawo Olimpii** – W środku zdania, gdy ktoś myśli, to piszemy kropki.
- ▶ **Prawo Mateusza** – Jeżeli zwiększymy jeden składnik o 10, 20, 30, 40, 50 to suma zwiększy się też o tyle.

▶ $3+2=5$ lub

$3+2=5$

▶ $3+12=15$

$13+2=15$

▶ $3+22=25$

$23+2=25$

▶ $3+32=35$

$33+2=35$

▶ $3+42=45$

$43+2=45$

▶ $3+52=55$

$53+2=55$

itd.

- ▶ **Prawo Mikołaja** – Linia z kreskami nazywa się odcinek.
- ▶ **Prawo Kuby** – Linia krzywa jest falista.
(Narysował krzywą na tablicy.)
- ▶ **Prawo Olimpii** – Krzywej nie można zmierzyć, bo jest falista.
- ▶ **Prawo Olimpii** – Jest też linia zygzakowata, która może składać się z odcinków i wtedy można ją zmierzyć. Trzeba każdy odcinek zmierzyć, a potem dodać. (Narysowała łamaną na tablicy.)

EDUKACJA DIALOGOWA

Zachęcanie i prowokowanie uczniów do:

- ❑ myślenia w różnorodny sposób,
- ❑ zadawania pytań, które nie ograniczają się do przypominania określonych treści, sprawdzania przez nauczyciela wiadomości,
- ❑ udzielania odpowiedzi, które są wzbogacone uzasadnieniem, rozwinięciem.

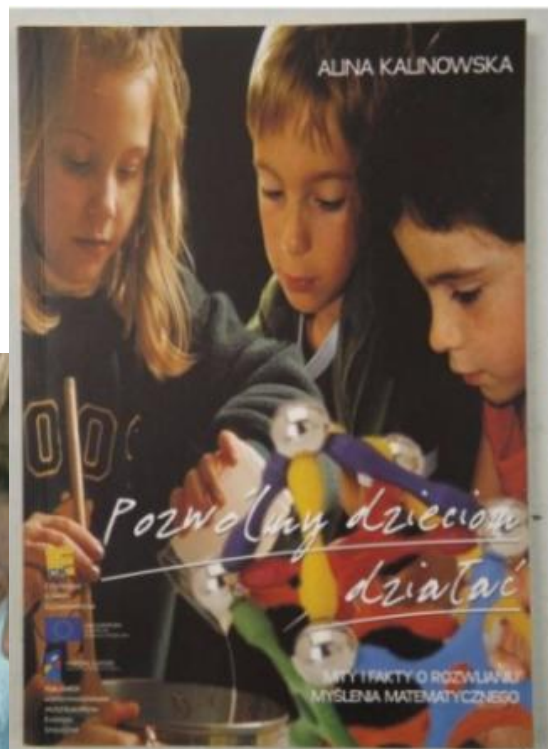
Przekazywanie informacji zwrotnej przez nauczyciela,

- ❑ nie tylko ocena, wartościowanie efektu, ale wskazówką do dalszej pracy;
- ❑ zachęcanie uczniów do dyskusji, kwestionowania prezentowanych stwierdzeń, szukania argumentów na poparcie innych rozwiązań;
- ❑ budowanie „rusztowania” zapewniającego odpowiednie wsparcie językowe i/lub koncepcyjne, narzędzia językowe pozwalające pogłębiać rozumienie;
- ❑ zapewnianie warunków do bezpiecznej wymiany poglądów, dających czas i przestrzeń do myślenia w relacjach społecznych.

MIROSLAW DĄBROWSKI

Pozwólmy dzieciom myśleć!

O UMIEJĘTNOŚCIACH MATEMATYCZNYCH POLSKICH TRZECIOKLASISTÓW
WYDANIE II ZMIENIONE



https://www.youtube.com/watch?v=7jv_QPQ7A9U



pakiet edukacyjny

Myślę, decyduję, działam – finanse dla najmłodszych

- buduje **wiedzę ekonomiczną**
- rozwija **umiejętności związane z funkcjonowaniem w rzeczywistości finansowej**, takie jak:
 - ▶ **zarządzanie pieniędzmi**
 - ▶ **namysł nad dokonywaniem wyborów**
 - ▶ **krytyczne myślenie**
- zwraca uwagę uczniów na humanistyczny wymiar procesów finansowych poprzez **działania charytatywne**

<https://www.youtube.com/watch?v=RWDAdqyB0xQ>